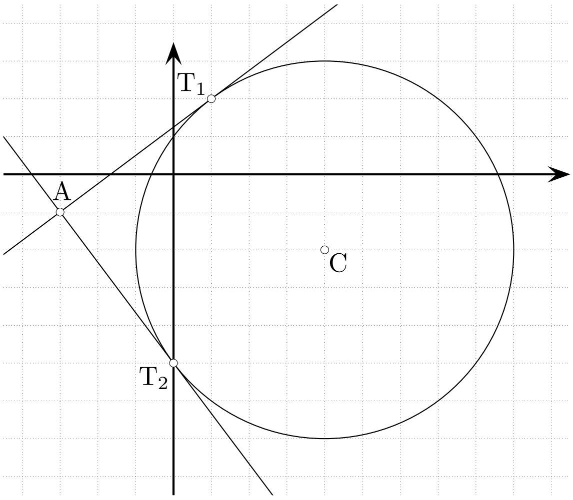
12.24



Soit $\mathrm{T}(x\,;y)$ un point de tangence.

1) On sait premièrement que $\overrightarrow{\mathrm{AT}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CT}}$:
   $0 = \overrightarrow{\mathrm{AT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CT}} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \end{pmatrix} = (x+3)\,(x-4) + (y+1)\,(y+2) =$
   $x^2 + y^2 - x + 3\,y - 10$

2) Par ailleurs, la distance entre le point de tangence et le centre du cercle est égale à son rayon : $5 = \|\overrightarrow{\mathrm{CT}}\|$. On en déduit :
   $25 = \|\overrightarrow{\mathrm{CT}}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2 = x^2 + y^2 - 8\,x + 4\,y + 20$
   On en tire la seconde équation : $x^2 + y^2 - 8\,x + 4\,y - 5 = 0$

Les coordonnées du point de tangence vérifient ainsi ce système :
$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 3\,y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8\,x + 4\,y - 5 = 0 \end{cases}$
En soustrayant ces équations, on obtient $7\,x - y - 5 = 0$.
On en tire $y = 7\,x - 5$ que l'on substitue dans la première équation :
$x^2 + (7\,x - 5)^2 - x + 3\,(7\,x - 5) - 10 = 0$
$x^2 + 49\,x^2 - 70\,x + 25 - x + 21\,x - 15 - 10 = 0$
$50\,x^2 - 50\,x = 50\,x\,(x-1) = 0$

1) $x = 1$ implique $y = 7 \cdot 1 - 5 = 2$, d'où le point de tangence $\mathrm{T}_1(1\,;2)$.
2) $x = 0$ donne $y = 7 \cdot 0 - 5 = -5$; le second point de tangence est $\mathrm{T}_2(0\,;-5)$.