13 Produit vectoriel

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle **produit vectoriel**, et on le note $\vec{a} \times \vec{b}$, le vecteur défini par :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix}$$

13.1 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calculer :

1) $\vec{a} \times \vec{b}$ 2) $\vec{a} \times \vec{c}$ 3) $\vec{b} \times \vec{c}$ 4) $\vec{c} \times \vec{b}$

13.2 Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Montrer que le vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

13.3

1) Trouver un vecteur perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2) Trouver un vecteur perpendiculaire au plan contenant les points $A(2\,;1\,;6)$, $B(-1\,;4\,;3)$ et $C(2\,;0\,;-3)$.

13.4 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} m \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$.
2) Pour quelle valeur du paramètre m existe-t-il des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{c}$? Déterminer alors les composantes des vecteurs $\vec{x}$.

13.5 Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ des vecteurs de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer les propriétés suivantes du produit vectoriel :

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ anti-commutativité
2) $(\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\,(\vec{a} \times \vec{b})$

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ distributivité

13.6 Simplifier l'expression $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$.

13.7 On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.
2) Calculer $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.
3) Que prouvent ces deux calculs ?

13.8 Vérifier l'identité de Lagrange : $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \, \|\vec{b}\|^2$.

13.9 Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace et φ l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1) Démontrer : $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin(\varphi)$.
2) En déduire que la norme du produit vectoriel est égale à la superficie du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

13.10 Vérifier que les points $A(2\,;1\,;-2)$, $B(2\,;3\,;0)$, $C(6\,;6\,;5)$ et $D(6\,;4\,;3)$ forment un parallélogramme et calculer son aire.

13.11 Vérifier que les points $A(2\,;2\,;3)$, $B(1\,;4\,;3)$, $C(-1\,;4\,;2)$ et $D(0\,;1\,;0)$ forment un tétraèdre et calculer son aire totale.

13.12 On considère les points $A(-1\,;2\,;-5)$, $B(5\,;4\,;0)$ et $C(11\,;8\,;3)$. Déterminer la longueur de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

13.13 On donne un tétraèdre de sommets $A(1\,;-5\,;2)$, $B(3\,;-6\,;0)$, $C(-3\,;6\,;15)$ et $D(6\,;5\,;-3)$.

1) Calculer l'angle aigu que forment les faces ABC et ABD.
2) Calculer l'angle aigu que forme l'arête AD avec la face ABC.

13.14 Démontrer que deux vecteurs de l'espace $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

13.15 Déterminer les paramètres t et u tels que les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

13.16 Montrer que si les diagonales d'un parallélogramme sont utilisées comme côtés d'un autre parallélogramme, alors l'aire du second parallélogramme est double de l'aire du premier.

Réponses

13.1 1) $\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

13.3 1) $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ 2) $\lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

13.4 1) Un tel vecteur $\vec{x}$ n'existe pas. 2) $m = -27 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 2\,t+5 \\ 3\,t-6 \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$

13.6 $\vec{0}$

13.7 1) $\begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -14 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -35 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) Le produit vectoriel n'est pas associatif.

13.10 12

13.11 $\frac{\sqrt{21}}{2} + \sqrt{70} + \frac{7\sqrt{3}}{2}$

13.12 $\frac{22\sqrt{61}}{61}$

13.13 1) 45° 2) 42,88°

13.15 $t = 2 \quad u = -\frac{1}{2}$

13.17 Montrer que si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont coplanaires, alors $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{0}$. La réciproque est-elle vraie ?

13.18 Montrer que si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, alors $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$.

13.19 Montrer que si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times c$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}-\vec{c}$ sont colinéaires.

13.20

1) En considérant le produit scalaire de deux vecteurs convenablement choisis, montrer l'identité trigonométrique
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\,\cos(\beta)+\sin(\alpha)\,\sin(\beta)$$
2) En considérant le produit vectoriel de deux vecteurs convenablement choisis, montrer l'identité trigonométrique
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\,\cos(\beta)-\cos(\alpha)\,\sin(\beta)$$

13.21 Montrer que, quels que soient les points A, B, C et D de l'espace, on a :
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\times\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\times\overrightarrow{\mathrm{AD}})+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\times\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$

13.22 Démontrer l'identité de Gibbs : $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$