13.4 1) Posons $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On doit avoir :

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_3 - 3\,x_2 \\ 3\,x_1 - x_3 \\ x_2 - 2\,x_1 \end{pmatrix} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Il s'agit ainsi de résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 4 \\ 3\,x_1 & & & - & x_3 & = & 5 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & & & = & 7 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array}\right.$$

En combinant les deux premières équations, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & 14 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & = & 7 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 3 \end{array}\right.$$

Il en résulte $0\,x_1 + 0\,x_2 = 0 = 35$ qui constitue une contradiction patente.

En conclusion, il ne peut y avoir un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$.

2) Posons $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On doit avoir :

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_3 - 3\,x_2 \\ 3\,x_1 - x_3 \\ x_2 - 2\,x_1 \end{pmatrix} = \vec{c} = \begin{pmatrix} m \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & m \\ 3\,x_1 & & & - & x_3 & = & 6 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & & & = & 5 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array}\right.$$

En combinant les deux premières équations, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & m + 12 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 3 \end{array}\right.$$

On obtient finalement $0\,x_1 + 0\,x_2 = 0 = m + 27$.

Ce système ne peut être consistant que si $m = -27$.

Sous cette condition, le système demeure indéterminé : $0 = 0$.

Posons $x_1 = t$ où $t \in \mathbb{R}$.

L'équation $-2\,x_1 + x_2 = 5$ donne $x_2 = 2\,x_1 + 5 = 2\,t + 5$.

L'équation $3\,x_1 - x_3 = 6$ implique $x_3 = 3\,x_1 - 6 = 3\,t - 6$.

On conclut à $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 2\,t + 5 \\ 3\,t - 6 \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$.