13.8 Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix} \right\|^2 + \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right)^2 =$$

$$(a_2\,b_3 - a_3\,b_2)^2 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)^2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)^2 + (a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3)^2 =$$

$$a_2^2\,b_3^2 - 2\,a_2\,a_3\,b_2\,b_3 + a_3^2\,b_2^2 + a_3^2\,b_1^2 - 2\,a_1\,a_3\,b_1\,b_3 + a_1^2\,b_3^2 + a_1^2\,b_2^2 - 2\,a_1\,a_2\,b_1\,b_2 + a_2^2\,b_1^2 +$$
$$a_1^2\,b_1^2 + a_2^2\,b_2^2 + a_3\,b_3^2 + 2\,a_1\,a_2\,b_1\,b_2 + 2\,a_1\,a_3\,b_1\,b_3 + 2\,a_2\,a_3\,b_2\,b_3 =$$

$$a_1^2\,b_1^2 + a_1^2\,b_2^2 + a_1^2\,b_3^2 + a_2^2\,b_1^2 + a_2^2\,b_2^2 + a_2^2\,b_3^2 + a_3^2\,b_1^2 + a_3^2\,b_2^2 + a_3^2\,b_3^2 =$$

$$a_1^2\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) =$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2$$