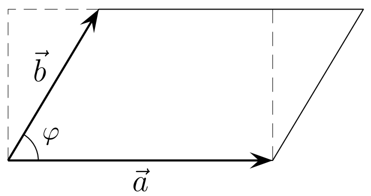
13.9 On utilise les conventions habituelles $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

1) L'identité de Lagrange implique :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \Big(\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\cos(\varphi)\Big)^2 =$$
$$= \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2\,\cos^2(\varphi) = \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2\,\big(1 - \cos^2(\varphi)\big) =$$
$$= \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2\,\sin^2(\varphi)$$

On sait que $\|\vec{a}\| \geqslant 0$ et que $\|\vec{b}\| \geqslant 0$. En admettant $0 \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$, on a aussi $\sin(\varphi) \geqslant 0$. C'est pourquoi, on conclut à $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\sin(\varphi)$.

2) 

Le parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ a une aire égale au rectangle de longueur $\|\vec{a}\|$ et de largeur $\|\vec{b}\|\,\sin(\varphi)$. Son aire vaut donc : $\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\sin(\varphi) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$.