13.10 1) Montrons que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 56 + 24 - 40 - 0 - 40 = 0$$

Les points A, B, C et D forment ainsi un quadrilatère.

2) Vérifions que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{ou encore} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$$

3) Calculons l'aire de ce parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = |4| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} =$$

$$= 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$