13.13 1) L'angle entre les faces ABC et ABD est égal à l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$, où le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur perpendiculaire au plan ABC et où le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur perpendiculaire au plan ABD.

(a) Détermination d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ perpendiculaire au plan ABC :

$$\overrightarrow{\text{AB}} \times \overrightarrow{\text{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan ABC.

(b) Détermination d'un vecteur $\overrightarrow{n_2}$ perpendiculaire au plan ABD :

$$\overrightarrow{\text{AB}} \times \overrightarrow{\text{AD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan ABD.

(c) Calcul de l'angle φ entre les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$:

$$\|\overrightarrow{n_1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\overrightarrow{n_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

La formule $\|\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}\| = \|\overrightarrow{n_1}\|\,\|\overrightarrow{n_2}\| \sin(\varphi)$ implique

$$\sin(\varphi) = \frac{\|\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}\|}{\|\overrightarrow{n_1}\|\,\|\overrightarrow{n_2}\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On conclut que $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$.

2) Si $\overrightarrow{n_1}$ désigne toujours un vecteur perpendiculaire au plan ABC et si l'on appelle ϑ l'angle aigu entre les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, alors l'angle aigu que forme l'arête AD avec la face ABC vaut $90^\circ - \vartheta$.

$$\|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\10\\-5\end{pmatrix}\right\| = \left\|5\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\| = |5|\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\| =$$
$$= 5\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = 5\sqrt{6}$$

$$\|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\10\\-5\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-10\\15\\20\end{pmatrix}\right\| = \left\|5\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\right\| =$$
$$= |5|\left\|\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{(-2)^2+3^2+4^2} = 5\sqrt{29}$$

L'égalité $\quad \|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}\| = \|\overrightarrow{n_1}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\|\,\sin(\vartheta) \quad$ conduit à

$$\sin(\vartheta) = \frac{\|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}\|}{\|\overrightarrow{n_1}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\|} = \frac{5\sqrt{29}}{3\cdot 5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{29}\sqrt{6}}{3\cdot 6} = \frac{\sqrt{174}}{18}$$

On en déduit que $\vartheta = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{174}}{18}\right) \approx 47{,}12^\circ$.

Finalement, l'angle aigu que forme l'arête AD avec la face ABC vaut $90^\circ - \vartheta \approx 90^\circ - 47{,}12^\circ = 42{,}88^\circ$.