13.14 1) Supposons $\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{b} = \lambda\,\vec{a}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\,\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \\ \lambda\,a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_2\,a_3 - \lambda\,a_2\,a_3 \\ \lambda\,a_1\,a_3 - \lambda\,a_1\,a_3 \\ \lambda\,a_1\,a_2 - \lambda\,a_1\,a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

2) Supposons que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

(a) Si $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$, alors $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont manifestement colinéaires.

(b) Supposons $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} \neq 0$.

Dans ce cas, $\|\vec{a}\| > 0$ et $\|\vec{b}\| > 0$.

Si l'on désigne par φ l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, l'égalité

$0 = \|\vec{0}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\sin(\varphi)$

implique $0 = \sin(\varphi)$, c'est-à-dire $\varphi = 0^\circ$ ou $\varphi = 180^\circ$.

En d'autres termes, cela signifie que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.