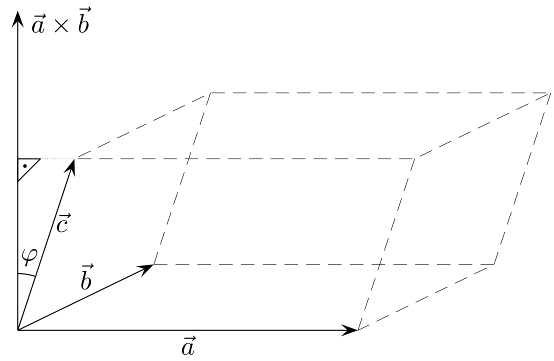
14 Produit mixte

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle **produit mixte** des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, et on le note $[\,\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,]$, le nombre $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

14.1 Vérifier que $[\,\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})\,.$

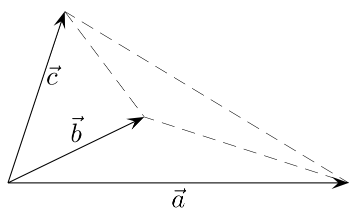
14.2 Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs de l'espace. On désigne par φ l'angle entre les vecteurs $\vec{a}\times\vec{b}$ et $\vec{c}$.
Montrer que le produit mixte $[\,\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,]$ est, au signe près, le volume du parallélépipède construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

Indication : utiliser les résultats des exercices 12.3 et 13.9.



14.3 Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs de l'espace.
Montrer que le volume du tétraèdre construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ vaut, au signe près, $\frac{1}{6}\,[\,\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,]$.

Indication : utiliser la formule $\frac{1}{3}\,\mathrm{B}\,h$ pour calculer le volume d'une pyramide et l'exercice précédent.



14.4 On considère les points $A(-1\,;-1\,;7)$, $B(-2\,;1\,;6)$, $C(0\,;1\,;6)$, $D(1\,;-1\,;7)$, $E(2\,;-2\,;3)$, $F(1\,;0\,;2)$, $G(3\,;0\,;2)$, $H(4\,;-2\,;3)$. Vérifier que le polyèdre ABCDEFGH est un parallélépipède et calculer son volume.

14.5 Vérifier que les points $A(0\,;2\,;3)$, $B(-2\,;2\,;-1)$, $C(4\,;-2\,;2)$ et $D(3\,;6\,;0)$ forment un tétraèdre et calculer son volume.

14.6 On considère un tétraèdre ABCD de volume égal à 5, dont on connaît les sommets $A(2\,;1\,;-1)$, $B(3\,;0\,;1)$ et $C(2\,;-1\,;3)$. Calculer les coordonnées du point D, sachant qu'il est situé sur l'axe OE_2.

Réponses

14.4 18

14.5 24

14.6 $D_1(0\,;-7\,;0)$ $D_2(0\,;8\,;0)$

14.7 Soient un point P ainsi qu'une droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{d}$. Montrer que la distance du point P à la droite d est donnée par

$$\delta(\mathrm{P}\,;d) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}\,.$$

Applications numériques

Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

1) $\mathrm{P}(1\,;2\,;2)$ $\quad$ $\mathrm{A}(1\,;-1\,;2)$ $\quad$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{P}(3\,;1\,;4)$ $\quad$ $\mathrm{A}(1\,;0\,;0)$ $\quad$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

14.8 Soient un point P et un plan défini par trois points A, B et C. Montrer que la distance du point P au plan est donnée par

$$\delta\big(\mathrm{P}, (\mathrm{ABC})\big) = \frac{\big|[\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,]\big|}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\|}\,.$$

Applications numériques

Calculer la distance du point P au plan (ABC) dans les cas suivants :

1) $\mathrm{A}(0\,;0\,;0)$ $\quad$ $\mathrm{B}(-1\,;-2\,;-3)$ $\quad$ $\mathrm{C}(2\,;-3\,;-1)$ $\quad$ $\mathrm{P}(3\,;2\,;-1)$

2) $\mathrm{A}(2\,;-3\,;-1)$ $\quad$ $\mathrm{B}(-1\,;-1\,;1)$ $\quad$ $\mathrm{C}(0\,;1\,;4)$ $\quad$ $\mathrm{P}(3\,;4\,;-2)$

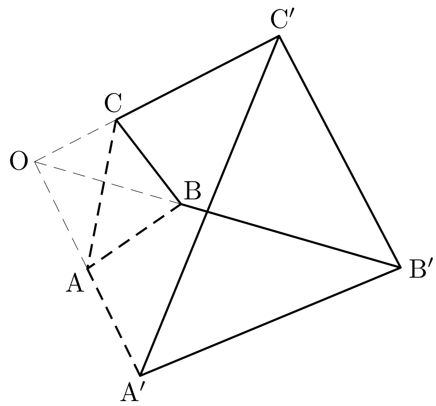
14.9 Soient A, B, C trois points et soient α, β, γ trois nombres réels strictement supérieurs à 1.

On considère les points A′, B′ et C′ définis par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OC'}} = \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

Montrer que le volume du polyèdre ABCA′B′C′ représenté ci-contre est donné par

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{6}\,\big|[\,\overrightarrow{\mathrm{BA'}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CB'}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\,]\big|$$



Réponses

14.7 $\quad$ 1) $\sqrt{6}$ $\quad$ 2) $\sqrt{21}$

14.8 $\quad$ 1) $2\sqrt{3}$ $\quad$ 2) $\frac{29\sqrt{21}}{21}$