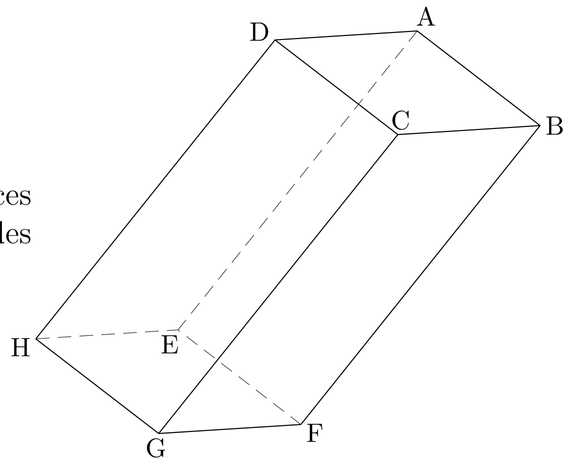
14.4 Les égalités

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

montrent respectivement que les faces ABCD, ABEF, CDHG et EFGH sont des parallélogrammes.



Les égalités

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$$

montrent en particulier que les faces BCGF et ADHE sont des parallélogrammes.

Par conséquent, le polyèdre ABCDEFGH est un parallélépipède, toutes ses faces étant des parallélogrammes.

Le parallélépipède ABCDEFGH est construit sur les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

Son volume vaut donc :

$$[\,\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\,] = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix} = 0 + 2 + 16 = 18$$

Le produit mixte $[\,\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\,]$ s'obtient aussi à l'aide du déterminant :

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -4\end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 - (-16) = 18$$