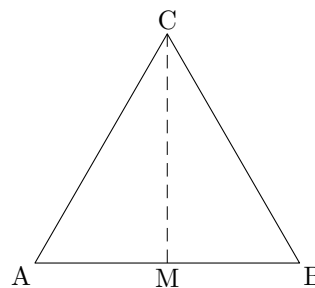


## 15 Trigonométrie dans le triangle rectangle

**15.1** On considère un triangle équilatéral ABC dont les côtés sont égaux à 2. On appelle M le milieu de AB.

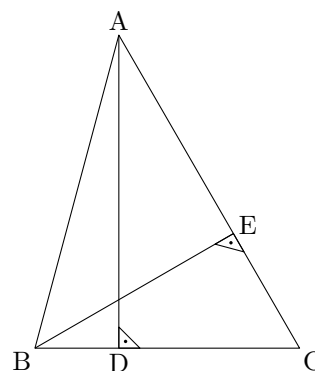
- 1) Que valent les angles  $\widehat{MAC}$  et  $\widehat{ACM}$  ?
- 2) Sans machine à calculer, déterminer les longueurs exactes des segments AC, AM et CM.
- 3) En déduire, toujours sans machine, les valeurs exactes de  $\cos(30^\circ)$ ,  $\sin(30^\circ)$ ,  $\tan(30^\circ)$ ,  $\cos(60^\circ)$ ,  $\sin(60^\circ)$  et  $\tan(60^\circ)$ .



**15.2** En considérant un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 1, déterminer sans machine à calculer les valeurs exactes de  $\cos(45^\circ)$ ,  $\sin(45^\circ)$  et  $\tan(45^\circ)$ .

**15.3** Dans la figure ci-contre, AD et BE sont des hauteurs du triangle ABC dans lequel  $AE = BE = \sqrt{3}$  et  $CE = 1$ .

- 1) Sans machine à calculer et à l'aide de l'exercice 15.1, déterminer tous les angles de cette figure.
- 2) Sans machine à calculer et à l'aide de l'exercice 15.1, calculer les longueurs des segments AB, BC, CD, AD et BD.
- 3) En déduire, toujours sans machine, les valeurs exactes de  $\cos(15^\circ)$ ,  $\sin(15^\circ)$ ,  $\tan(15^\circ)$ ,  $\cos(75^\circ)$ ,  $\sin(75^\circ)$  et  $\tan(75^\circ)$ .



**15.4** En considérant un triangle rectangle d'hypoténuse égale à 1 et dont l'un des angles aigus vaut  $\alpha$ , prouver les identités

$$1) \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \qquad 2) \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

**15.5** La voûte d'un tunnel routier est un arc de cercle d'angle au centre  $220^\circ$ . Calculer le rayon  $r$  de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 12 m. Calculer aussi la hauteur maximale de la voûte au-dessus du sol.

- 15.6** 1) Calculer la longueur d'un côté d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de 25 cm de rayon.  
2) Calculer la longueur d'un côté d'un pentagone étoilé régulier inscrit dans un cercle de 25 cm de rayon.
- 15.7** L'aire d'un polygone régulier convexe à 15 côtés est égale à 1500. Calculer son côté, ainsi que le rayon de ses cercles inscrit et circonscrit.
- 15.8** Une tour circulaire de 20 m de diamètre est vue sous un angle horizontal de  $18^\circ$ . À quelle distance du point le plus proche de la tour se trouve-t-on ?
- 15.9** La taille d'un homme est 1,8 m et ses yeux sont à 1,65 m du sol. Sous quel angle vertical se voit-il dans un miroir permettant une vue en pied s'il en est placé à 1,4 m ?
- 15.10** La distance à vol d'oiseau de Rolle à Villeneuve est approximativement égale à 45 km. En supposant qu'on parvienne à relier, par un câble parfaitement rectiligne, deux bornes situées au bord du lac, l'une à Rolle, l'autre à Villeneuve, quelle serait la profondeur maximale atteinte par le câble dans le lac ?  
(Le rayon de la terre mesure 6370 km.)
- 15.11** La partie émergente d'un paquebot mesure 45 m de hauteur.  
Au sortir d'un port, le bateau met son cap dans une direction perpendiculaire à la rive.  
1) Quelle est la hauteur de la partie du bateau encore visible depuis le port lorsqu'il a parcouru 15 km ?  
2) Quelle distance minimum a-t-il parcourue lorsqu'il n'est plus visible depuis le port ?  
On admettra que la terre est une boule de rayon égal à 6370 km.
- 15.12** Deux observateurs, situés à la même altitude, distants de 1350 m, mesurent au même moment les hauteurs d'un point remarquable d'un nuage situé entre eux. Ce point est dans le plan vertical contenant les deux observateurs et les angles d'élévation sont de  $65,4^\circ$  et  $76,5^\circ$ . Quelle est la hauteur du nuage ?

- 15.13** Une plaine horizontale de 320 m d'altitude est bordée d'une chaîne de montagnes. D'un point de la plaine, on aperçoit le sommet de l'une d'elles sous un angle d'élévation de  $30^\circ$ . Cet angle s'accroît de  $12^\circ$  lorsqu'on s'avance de 1000 m vers le pied de la montagne. Quelle est l'altitude du sommet visé ?
- 15.14** D'un point de vue situé à 225 m au-dessus du niveau d'un lac, on aperçoit le sommet d'une montagne de la rive opposée sous un angle d'élévation de  $5,13^\circ$ . Du même point de vue, l'image réfléchie du sommet de la montagne par la surface du lac apparaît sous un angle de dépression de  $6,88^\circ$ . Calculer l'altitude de la montagne sachant que celle du lac est égale à 375 m.

## Réponses

- 15.1** 1)  $\widehat{MAC} = 60^\circ$  et  $\widehat{ACM} = 30^\circ$   
 2)  $AC = 2$ ,  $AM = 1$  et  $CM = \sqrt{3}$   
 3)  $\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$      $\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$   
 $\tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$      $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$
- 15.2**  $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$      $\tan(45^\circ) = 1$
- 15.3** 2)  $AB = \sqrt{6}$     $BC = 2$     $CD = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$     $AD = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$     $BD = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$   
 3)  $\cos(15^\circ) = \sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$      $\cos(75^\circ) = \sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$   
 $\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$      $\tan(75^\circ) = 2 + \sqrt{3}$
- 15.5**  $r = 6,39$  m     $h = 8,57$  m
- 15.6** 1) 29,39 cm    2) 47,55 cm
- 15.7** Côté : 9,22  
 Rayon du cercle inscrit : 21,69  
 Rayon du cercle circonscrit : 22,17
- 15.8** 53,92 m
- 15.9**  $33,58^\circ$
- 15.10** 39,74 m
- 15.11** 1) 27,34 m    2) 23,94 km
- 15.12** 1934 m
- 15.13** 1929 m
- 15.14** 1908 m