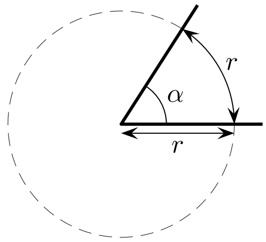
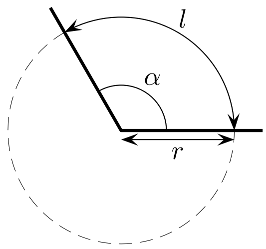
16 Cercle trigonométrique

Mesure des angles en radians



On dit que la mesure d'un angle est de 1 radian si la longueur de l'arc de cercle correspondant est égale au rayon du cercle : $\alpha = 1$ radian.



Mesurer les angles en radians offre dès lors un avantage pratique : la longueur l d'un arc de cercle de rayon r correspondant à un angle α vaut

$$l = \alpha\, r$$

où l'angle α est mesuré en radians.

Puisque la circonférence d'un cercle de rayon r est égale à $2\,\pi\, r$, on a l'identité

$$360^\circ = 2\,\pi \text{ radians}$$

16.1 Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians.

1) $\frac{\pi}{6}$	2) $\frac{2\pi}{3}$	3) $\frac{\pi}{10}$	4) $4\,\pi$
5) $\frac{5\pi}{6}$	6) $\frac{15\pi}{4}$	7) $\frac{7\pi}{6}$	8) $\frac{11\pi}{5}$

16.2 Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés.

1) 45°	2) 60°	3) 75°	4) 30°
5) 120°	6) 315°	7) 180°	8) 270°
9) 108°	10) 36°	11) 135°	12) 300°

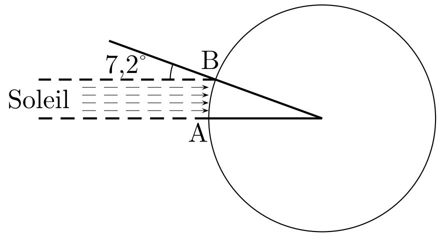
16.3

1) Calculer la longueur d'un arc de cercle
   (a) de 32° sur un cercle de rayon 15 cm ;
   (b) de 2 radians sur un cercle de rayon 7 cm.
2) Calculer le rayon d'un cercle sur lequel
   (a) un arc de 1° mesure 3 mm ;
   (b) un arc de $0{,}03^\circ$ mesure 0,05 mm.

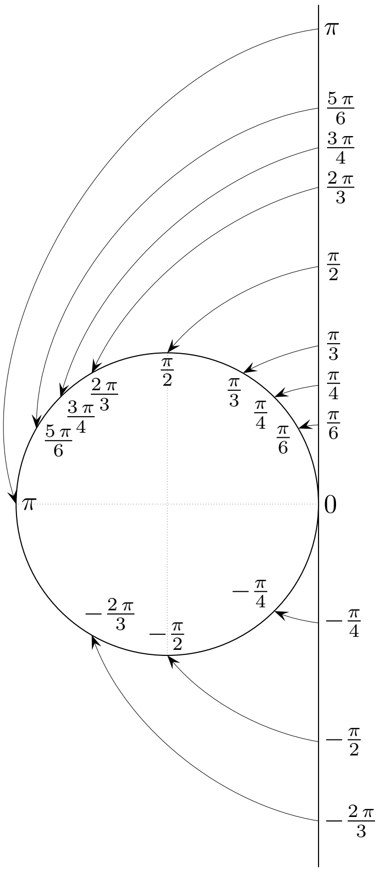
16.4 Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km.

Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale de B un angle de 7,2°.

En déduire la circonférence et le rayon terrestres[1].



Cercle trigonométrique



On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

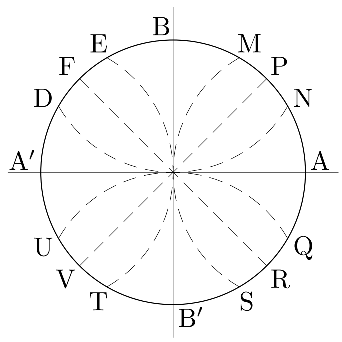
On fixe le point A(1 ; 0) et on « enroule » la droite des réels autour du cercle trigonométrique dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Plus précisément, à tout nombre réel α, on fait correspondre le point M du cercle trigonométrique tel que :

1) l'arc de cercle AM a une longueur égale à $|\alpha|$;
2) il est orienté
   - positivement (sens contraire des aiguilles d'une montre) si $\alpha > 0$;
   - négativement (sens des aiguilles d'une montre) si $\alpha < 0$.

16.5 Donner les images sur le cercle trigonométrique des réels suivants :

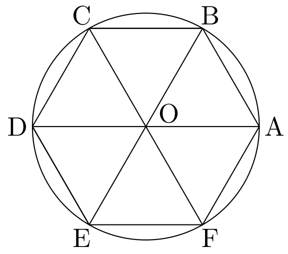
1) $\frac{\pi}{2}$	2) $\frac{\pi}{4}$	3) $\frac{3\pi}{4}$
4) $-\frac{\pi}{4}$	5) $-\frac{\pi}{2}$	6) $-\frac{3\pi}{4}$
7) $\frac{\pi}{3}$	8) $\frac{2\pi}{3}$	9) $-\frac{\pi}{3}$
10) $-\frac{2\pi}{3}$	11) $\frac{7\pi}{6}$	12) $-\frac{5\pi}{6}$



1. Cette méthode a été imaginée par Ératosthène (276-194 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

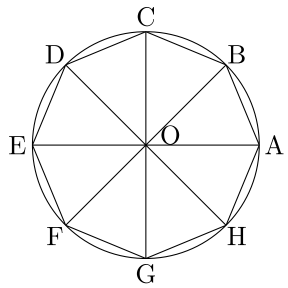
16.6 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

1) Donner les réels de $]-\pi\,;\pi]$ qui ont pour images A, B, C, D, E et F.
2) De la même façon, donner dans $[0\,;2\,\pi[$ les réels ayant pour images A, B, C, D, E et F.



16.7 ABCDEFGH est un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

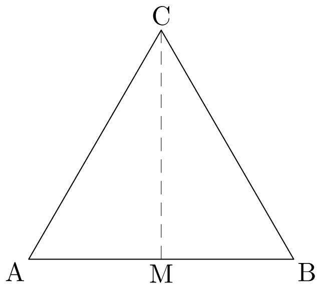
1) Donner les réels de $]-\pi\,;\pi]$ qui ont pour images A, B, C, D, E, F, G et H.
2) De la même façon, donner dans $[0\,;2\,\pi[$ les réels ayant pour images A, B, C, D, E, F, G et H.



Valeurs exactes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers

16.8 On considère un triangle équilatéral ABC dont les côtés sont égaux à 2. On appelle M le milieu de AB.

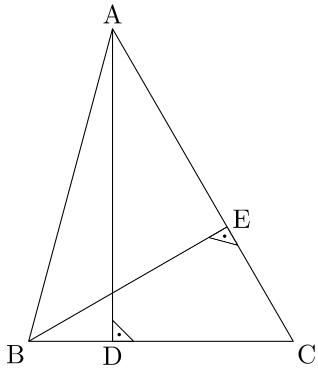
1) Que valent les angles $\widehat{\mathrm{MAC}}$ et $\widehat{\mathrm{ACM}}$?
2) Sans machine à calculer, déterminer les longueurs exactes des segments AC, AM et CM.
3) En déduire, toujours sans machine, les valeurs exactes de $\cos(30^\circ)$, $\sin(30^\circ)$, $\tan(30^\circ)$, $\cos(60^\circ)$, $\sin(60^\circ)$ et $\tan(60^\circ)$.



16.9 En considérant un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 1, déterminer sans machine à calculer les valeurs exactes de $\cos(45^\circ)$, $\sin(45^\circ)$ et $\tan(45^\circ)$.

16.10 Dans la figure ci-contre, AD et BE sont des hauteurs du triangle ABC dans lequel $\mathrm{AE} = \mathrm{BE} = \sqrt{3}$ et $\mathrm{CE} = 1$.

1) Sans machine à calculer et à l'aide de l'exercice 16.8, déterminer tous les angles de cette figure.
2) Sans machine à calculer et à l'aide de l'exercice 16.8, calculer les longueurs des segments AB, BC, CD, AD et BD.
3) En déduire, toujours sans machine, les valeurs exactes de $\cos(15^\circ)$, $\sin(15^\circ)$, $\tan(15^\circ)$, $\cos(75^\circ)$, $\sin(75^\circ)$ et $\tan(75^\circ)$.



16.11 En considérant un triangle rectangle d'hypoténuse égale à 1 et dont l'un des angles aigu vaut α, prouver les identités

1) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ 2) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Cosinus et sinus d'un réel

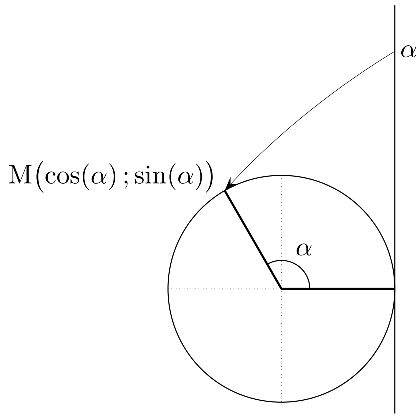
Soient α un nombre réel et M son image sur le cercle trigonométrique.

Le cosinus de α est l'abscisse de M.

Le sinus de α est l'ordonnée de M.

En résumé, les coordonnées du point M sont $\mathrm{M}\big(\cos(\alpha)\,;\sin(\alpha)\big)$.

Remarque : lorsque l'angle α est aigu, on retrouve les fonctions trigonométriques définies dans le triangle rectangle.

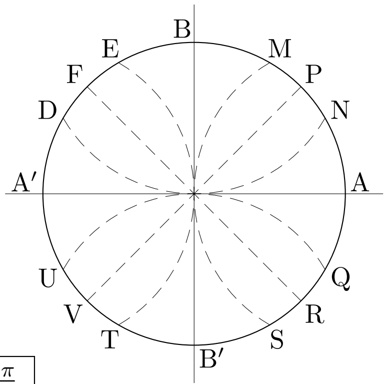


16.12 1) À l'aide des exercices 16.8 et 16.9, déterminer les coordonnées des points A, N, P, M, B, E, F, D, A′, U, V, T, B′, S, R et Q.

2) Compléter le tableau suivant :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\alpha)$									
$\sin(\alpha)$									

α	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\cos(\alpha)$							
$\sin(\alpha)$							



16.13 1) Sachant que $\sin(\alpha) = \frac{4}{5}$ et que $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, calculer sans machine $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ sans déterminer α.

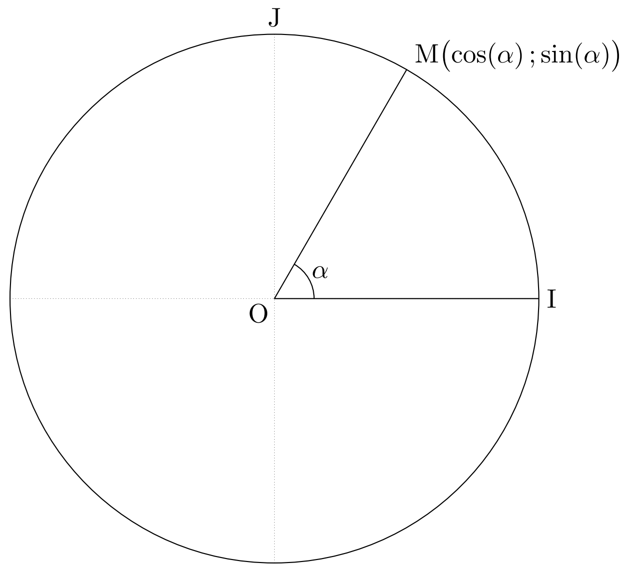
2) Sachant que $\cos(\alpha) = -\frac{12}{13}$ et que $\alpha \in]-\pi\,;0[$, calculer sans machine $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ sans déterminer α.

3) Sachant que $\tan(\alpha) = \frac{12}{5}$ et que $\alpha \in]-\frac{3\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}[$, calculer sans machine $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sans déterminer α.

Indication : utiliser les formules de l'exercice 16.11.

Relations entre fonctions trigonométriques

16.14 Soit $\mathrm{M}\big(\cos(\alpha)\,;\sin(\alpha)\big)$ un point du cercle trigonométrique.



1) (a) Construire l'image M_1 du point M par la symétrie d'axe OI.
   (b) Que vaut l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}_1}$?
   (c) Quelles sont les coordonnées du point M_1 ?
   (d) Conclure aux relations :

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

2) (a) Construire l'image M_2 du point M par la symétrie d'axe OJ.
   (b) Que vaut l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}_2}$?
   (c) Quelles sont les coordonnées du point M_2 ?
   (d) Conclure aux relations :

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

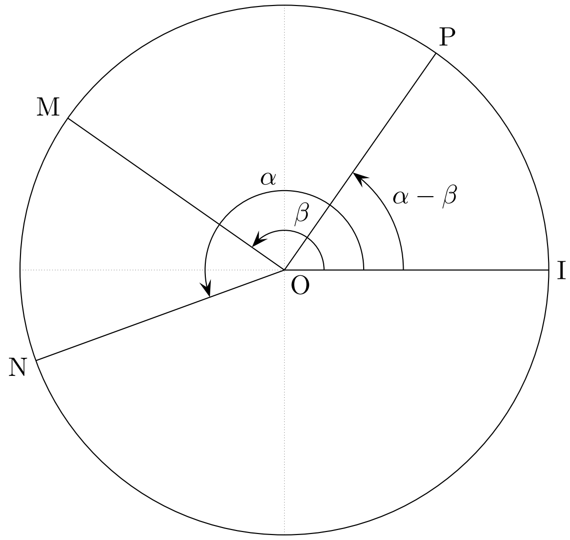
3) (a) Construire l'image M_3 du point M par la symétrie de centre O.
   (b) Que vaut l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}_3}$?
   (c) Quelles sont les coordonnées du point M_3 ?
   (d) Conclure aux relations :

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$

4) (a) Construire l'image M_4 du point M par la symétrie dont l'axe est la bissectrice intérieure des droites OI et OJ.
   (b) Que vaut l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}_4}$?
   (c) Quelles sont les coordonnées du point M_4 ?
   (d) Conclure aux relations :

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

16.15 Sur le cercle trigonométrique, on considère les points $\mathrm{M}\big(\cos(\beta)\,;\sin(\beta)\big)$, $\mathrm{N}\big(\cos(\alpha)\,;\sin(\alpha)\big)$ et $\mathrm{P}\big(\cos(\alpha-\beta)\,;\sin(\alpha-\beta)\big)$.



1) Calculer $\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|^2$.
2) Calculer $\|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\|^2$.
3) Que peut-on dire des normes $\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|$ et $\|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\|$?
4) En déduire : $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\,\cos(\beta)+\sin(\alpha)\,\sin(\beta)$.

16.16
1) En remplaçant β par $-\beta$ dans la formule de l'exercice précédent, montrer : $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\,\cos(\beta)-\sin(\alpha)\,\sin(\beta)$.
2) En utilisant l'exercice 16.14 4) et l'exercice 16.15 4), montrer : $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\,\cos(\beta)+\cos(\alpha)\,\sin(\beta)$.
3) En remplaçant β par $-\beta$ dans la formule précédente, montrer : $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\,\cos(\beta)-\cos(\alpha)\,\sin(\beta)$.

16.17 Démontrer :
1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\,\tan(\beta)}$
2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\,\tan(\beta)}$

Réponses

16.1 1) 30° 2) 120° 3) 18° 4) 720°
5) 150° 6) 675° 7) 210° 8) 396°

16.2 1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{5\pi}{12}$ 4) $\frac{\pi}{6}$
5) $\frac{2\pi}{3}$ 6) $\frac{7\pi}{4}$ 7) π 8) $\frac{3\pi}{2}$
9) $\frac{3\pi}{5}$ 10) $\frac{\pi}{5}$ 11) $\frac{3\pi}{4}$ 12) $\frac{5\pi}{3}$

16.3 1) (a) 8,37 cm (b) 14 cm 2) (a) 172 mm (b) 95 mm

16.4 Circonférence : 40 000 km Rayon : 6 366,2 km

16.5 1) B 2) P 3) F 4) R
5) B′ 6) V 7) M 8) E
9) S 10) T 11) U 12) U

16.6 1) A : 0 B : $\frac{\pi}{3}$ C : $\frac{2\pi}{3}$ D : π E : $-\frac{2\pi}{3}$ F : $-\frac{\pi}{3}$
2) A : 0 B : $\frac{\pi}{3}$ C : $\frac{2\pi}{3}$ D : π E : $\frac{4\pi}{3}$ F : $\frac{5\pi}{3}$

16.7 1) A : 0 B : $\frac{\pi}{4}$ C : $\frac{\pi}{2}$ D : $\frac{3\pi}{4}$ E : π F : $-\frac{3\pi}{4}$ G : $-\frac{\pi}{2}$ H : $-\frac{\pi}{4}$
2) A : 0 B : $\frac{\pi}{4}$ C : $\frac{\pi}{2}$ D : $\frac{3\pi}{4}$ E : π F : $\frac{5\pi}{4}$ G : $\frac{3\pi}{2}$ H : $\frac{7\pi}{4}$

16.8 1) $\widehat{\mathrm{MAC}} = 60^\circ$ et $\widehat{\mathrm{ACM}} = 30^\circ$
2) $\mathrm{AC} = 2$, $\mathrm{AM} = 1$ et $\mathrm{CM} = \sqrt{3}$
3) $\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$
$\tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

16.9 $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan(45^\circ) = 1$

16.10 2) $\mathrm{AB} = \sqrt{6}$ $\mathrm{BC} = 2$ $\mathrm{CD} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\mathrm{AD} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ $\mathrm{BD} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$
3) $\cos(15^\circ) = \sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\cos(75^\circ) = \sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$ $\tan(75^\circ) = 2 + \sqrt{3}$

16.12 1) $\mathrm{A}(1\,;0)$ $\mathrm{N}(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2})$ $\mathrm{P}(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\mathrm{M}(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$
$\mathrm{B}(0\,;1)$ $\mathrm{E}(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\mathrm{F}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\mathrm{D}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2})$
$\mathrm{A}'(-1\,;0)$ $\mathrm{U}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2})$ $\mathrm{V}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\mathrm{T}(-\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2})$
$\mathrm{B}'(0\,;-1)$ $\mathrm{S}(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\mathrm{R}(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\mathrm{Q}(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2})$

2)

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

16.13 1) $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$ $\quad\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$

2) $\sin(\alpha) = -\frac{5}{13}$ $\quad\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$

3) $\cos(\alpha) = -\frac{5}{13}$ $\quad\sin(\alpha) = -\frac{12}{13}$

16.15 1) $\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|^2 = 2 - 2\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - 2\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta)$

2) $\|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\|^2 = 2 - 2\,\cos(\alpha - \beta)$

3) $\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\|$

16.18 Une poulie est actionnée par une courroie dont la vitesse est de 40 cm/s. Calculer le diamètre de cette poulie, sachant que sa vitesse angulaire est de 36 tours par minute.

16.19 Une roue d'automobile a un diamètre de 60 cm. Quelle est, en tours par minute, sa vitesse angulaire lorsque la vitesse de la voiture est de 60 km/h ?

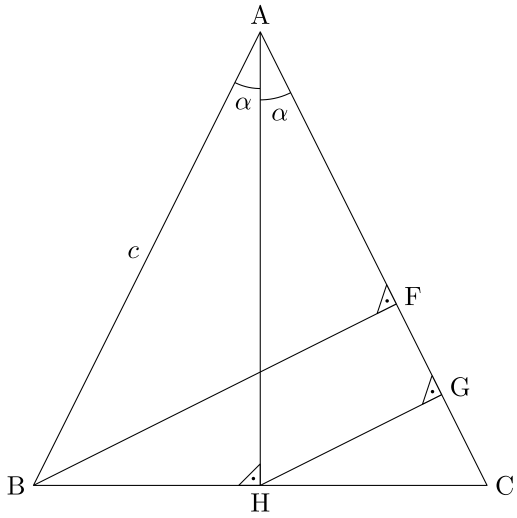
16.20 Les roues d'une diligence tirée par des chevaux ont un diamètre de 1 m et comportent 16 rayons. Lors du tournage d'un western, cette diligence est filmée par une caméra opérant à la vitesse de 24 images par seconde. Lors de la projection du film, les roues semblent avancer, reculer ou rester immobiles, suivant la vitesse de l'attelage.

Sachant que la vitesse d'un cheval au galop n'excède guère 20 km/h, quelle doit être la vitesse en km/h de la diligence pour que :

1) les roues semblent immobiles ?
2) les roues semblent avancer ?
3) les roues semblent reculer ?
4) les roues semblent compter 32 rayons ?

16.21 On considère un triangle ABC isocèle en A. On désigne par $2\,\alpha$ l'angle au sommet de ce triangle et par c la longueur du côté AB.

1) Calculer, en fonction de c et des rapports trigonométriques de l'angle α ou de l'angle $2\,\alpha$, les longueurs des côtés AF, AG, CG, BF et HG.
2) En déduire les égalités :
$\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin(\alpha)\,\cos(\alpha)$
$\cos(2\,\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$



Réponses

16.18 $\frac{200}{3\,\pi} \approx 21{,}22$ cm

16.19 $\frac{5000}{3\,\pi} \approx 530{,}52$ tours par minute

16.20
1) vitesse égale à $\frac{27\,\pi}{5} \approx 16{,}96$ km/h
2) vitesse inférieure à $\frac{27\,\pi}{10} \approx 8{,}48$ km/h ou supérieure à $\frac{27\,\pi}{5} \approx 16{,}96$ km/h
3) vitesse comprise entre $\frac{27\,\pi}{10} \approx 8{,}48$ km/h et $\frac{27\,\pi}{5} \approx 16{,}96$ km/h
4) $\frac{27\,\pi}{10} \approx 8{,}48$ km/h