15.13 1) L'égalité fondamentale $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ donne :
$\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$
$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$
Mais $\cos(\alpha) > 0$ si $\alpha \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.
C'est pourquoi $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

2) L'égalité fondamentale $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ implique :
$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$
$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$
Or $\sin(\alpha) < 0$ si $\alpha \in]-\pi ; 0[$.
Par conséquent $\sin(\alpha) = -\frac{5}{13}$.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

3) L'égalité $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{12}{5}$ conduit à la relation $5\,\sin(\alpha) = 12\,\cos(\alpha)$, en effectuant les produits croisés.
Ainsi $\sin(\alpha) = \frac{12}{5}\,\cos(\alpha)$.
Par ailleurs, $1 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) + \left(\frac{12}{5}\,\cos(\alpha)\right)^2 =$
$\cos^2(\alpha) + \frac{144}{25}\,\cos^2(\alpha) = \frac{169}{25}\,\cos^2(\alpha)$.
On en déduit $\cos^2(\alpha) = \frac{25}{169}$ et ensuite $\cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$.
Vu que $\cos(\alpha) < 0$ lorsque $\alpha \in]-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}[$, on conclut à $\cos(\alpha) = -\frac{5}{13}$.
Finalement, $\sin(\alpha) = \frac{12}{5}\,\cos(\alpha) = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$.