16.15 1) $\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) \end{pmatrix} \right\|^2 = \big(\cos(\alpha) - \cos(\beta)\big)^2 + \big(\sin(\alpha) - \sin(\beta)\big)^2 =$

$\cos^2(\alpha) - 2\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) - 2\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta) + \sin^2(\beta) =$
$2 - 2\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - 2\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta)$
étant donné que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1$.

2) $\|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) - 1 \\ \sin(\alpha - \beta) - 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \big(\cos(\alpha - \beta) - 1\big) + \big(\sin(\alpha - \beta)\big)^2 =$
$\cos^2(\alpha - \beta) - 2\,\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\,\cos(\alpha - \beta)$
en utilisant que $\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = 1$.

3) La rotation de centre O et d'angle β amène le point I sur le point M et le point P sur le point N. Étant donné qu'une rotation préserve les longueurs, les normes $\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|$ et $\|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\|$ sont égales.

4) Les résultats précédents conduisent à l'égalité :
$2 - 2\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - 2\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta) = 2 - 2\,\cos(\alpha - \beta)$
Il en résulte aussitôt la formule :
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) + \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$.