

17 Trigonométrie dans le triangle quelconque

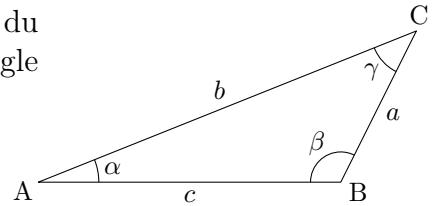
17.1 Théorème du cosinus

Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, diminuée du double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma)$$



Démontrer le théorème du cosinus à l'aide des exercices 12.2 2) et 12.3 3).

17.2 Théorème de l'aire

L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de deux de ses côtés par le sinus de l'angle qu'ils comprennent :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a b \sin(\gamma) = \frac{1}{2} a c \sin(\beta) = \frac{1}{2} b c \sin(\alpha)$$

Démontrer le théorème de l'aire grâce à l'exercice 13.9.

17.3 Théorème du sinus

Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Déduire le théorème du sinus du théorème de l'aire.

Remarques concernant l'utilisation des théorèmes du cosinus et du sinus

– Si α est un angle d'un triangle, la connaissance de $\cos(\alpha)$ permet de déterminer sans ambiguïté l'angle α : il n'y a qu'un angle de mesure comprise entre 0° et 180° (0 rad et π rad) tel que $\cos(\alpha) = x$, si $-1 \leq x \leq 1$.

En revanche, la connaissance de $\sin(\alpha)$ ne permet pas de déterminer α de manière unique, puisque deux angles supplémentaires ont même sinus : $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$.

Il faudra donc être prudent lors de l'utilisation du théorème du sinus, en envisageant toutes les solutions. On pourra ensuite éliminer les valeurs indésirables en vérifiant que la condition $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ est satisfaite ou en utilisant le fait que dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

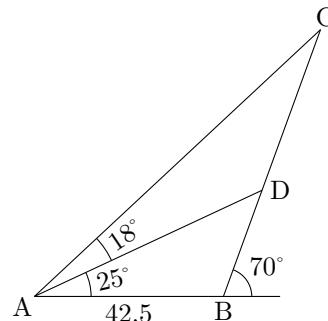
– Le théorème du cosinus convient bien à la résolution des triangles définis par leurs trois côtés, ou par deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.

Dans les autres cas, on aura recours au théorème du sinus.

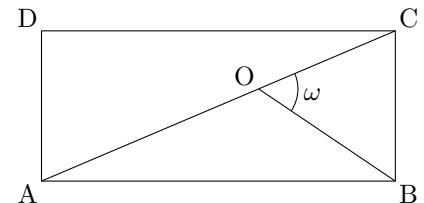
- 17.4** Sachant que ABC est un triangle quelconque, compléter le tableau ci-dessous (les angles sont mesurés en degrés) :

a	b	c	α	β	γ	\mathcal{A}
5	6	7				
5	7		35°			
4	9				54°	
		8	40°	80°		
6	5					12
	4		70°			10
			42°	63°		15
		4			60°	6

- 17.5** Dans la figure ci-contre, calculer la longueur des segments BC , BD , AD et AC .



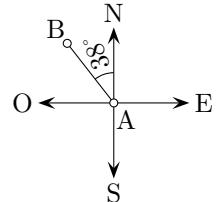
- 17.6** Sur la diagonale AC d'un rectangle $ABCD$, on considère un point O tel que $\widehat{BOC} = \omega = 57^\circ$. Sachant que $AB = 36$ et que $AO = 24$, calculer la longueur du côté BC .



- 17.7** D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne l'angle en A : 110° , ainsi que les longueurs des quatre côtés : $AB = 3$, $BC = CD = 6$, $AD = 5$. Calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

- 17.8** Un triangle ABC est donné par $a = 10$, $b = 4$ et $c = \sqrt{52}$. Calculer sans machine la longueur de la médiane du triangle issue de A , et montrer qu'elle est perpendiculaire à AC .

- 17.9** Un triangle est donné par $a = 28,4$, $b = 36,9$ et $\gamma = 54,9^\circ$. Calculer les longueurs des bissectrices de ce triangle.
- 17.10** Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on fait le choix, dans un plan vertical contenant C, de deux points A et B distants de 200 m. On mesure les angles $\widehat{BAC} = 110^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$, ainsi que l'angle $\delta = 40^\circ$ entre AB et l'horizontale. Quelle est l'altitude de C si celle de A, extrémité inférieure de la base, est de 800 m ?
- 17.11** Une tour de 50 m de hauteur est située sur le flanc d'une colline. Si, depuis le pied de la tour, on descend de 220 m le long de la colline, on voit la tour sous un angle vertical de $12,5^\circ$. Calculer l'angle d'inclinaison de la colline par rapport à un plan horizontal.
- 17.12** D'un point A, un pilote parcourt 125 km dans la direction NO 38° jusqu'au point B. Là, il tourne dans l'intention de revenir vers A. En fait, en raison d'une erreur, il parcourt 125 km dans la direction SE 51° . Combien de kilomètres lui reste-t-il à parcourir et dans quelle direction pour rejoindre A ?



Réponses

17.4

a	b	c	α	β	γ	\mathcal{A}
5	6	7	$44,4^\circ$	$57,1^\circ$	$78,5^\circ$	14,70
5	7	8,7	35°	$53,4^\circ$	$91,6^\circ$	17,49
		2,8		$126,6^\circ$	$18,4^\circ$	5,53
4	9	7,4	$26,0^\circ$	$100,0^\circ$	54°	14,56
5,9	9,1	8	40°	80°	60°	23,39
6	5	5,0	$73,7^\circ$	$53,1^\circ$	$53,1^\circ$	12
		9,8	$29,2^\circ$	$24,0^\circ$	$126,9^\circ$	
5,5	4	5,3	70°	$43,6^\circ$	$66,4^\circ$	10
4,8	6,4	7,0	42°	63°	75°	15
3,1	4,5	4	$41,5^\circ$	$78,5^\circ$	60°	6

17.5 $BC = 63,8$ $BD = 25,4$ $AD = 56,5$ $AC = 88,0$

17.6 $BC = 15,3$

17.7 $\mathcal{A} = 23,66$ $\beta = 101,3^\circ$ $\gamma = 67,3^\circ$ $\delta = 81,4^\circ$

17.8 Longueur de la médiane issue de A : 3

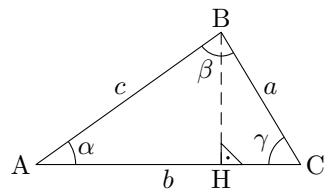
17.9 $b_a = 30,7$ $b_b = 23,3$ $b_c = 28,5$

17.10 1024 m

17.11 $5,3^\circ$

17.12 28,3 km dans la direction SO $45,5^\circ$.

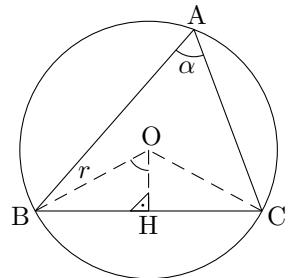
- 17.13** Démontrer le théorème du cosinus en appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABH. Plus précisément, exprimer les longueurs des côtés AH et BH en fonction de a , b et de l'angle γ et montrer la formule $c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma)$.



- 17.14** Exprimer, dans la figure de l'exercice précédent, la longueur de BH en fonction de a et de l'angle γ . En déduire le théorème de l'aire.

- 17.15** Soit un triangle ABC. On désigne respectivement par O et r le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

- 1) Montrer que $\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$.
- 2) En déduire le théorème du sinus.



- 17.16** Calculer le côté et les angles inconnus d'un triangle ABC, connaissant $a = 5$, $c = 7$, et sachant de plus que la longueur de la bissectrice issue de B est égale à 4,5.

- 17.17** On donne les longueurs des côtés d'un quadrilatère convexe ABCD inscriptible dans un cercle : $AB = 8$, $BC = 7$, $CD = 4$, $DA = 5$. Calculer les longueurs de ses diagonales, ses angles, ainsi que le diamètre de son cercle circonscrit.

- 17.18** D'un trapèze ABCD, on connaît les bases $AB = 5$ cm et $CD = 11$ cm, la hauteur 6 cm ainsi que l'angle entre les côtés AD et BC : 48° . Calculer les côtés et les angles inconnus du trapèze.

Réponses

17.16 $b = 7,79$ $\alpha = 39,06^\circ$ $\beta = 79,04^\circ$ $\gamma = 61,91^\circ$

17.17 $AC = 7,74$ $BD = 8,65$ $\alpha = 79,8^\circ$ $\beta = 61,7^\circ$ $\gamma = 100,12^\circ$ $\delta = 118,3^\circ$
diamètre du cercle circonscrit : 8,79

17.18 $BC = 6,04$ $DA = 8,02$ $\angle A = 96,4^\circ$ $\angle B = 131,6^\circ$ $\angle C = 48,4^\circ$
 $\angle D = 83,6^\circ$