

17.4

- 1) La formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$ implique

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{5^2 - 6^2 - 7^2}{-2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{-60}{-84} = \frac{5}{7}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5}{7}\right) \approx 44,42^\circ$$

L'identité $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$ donne

$$\cos(\beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{6^2 - 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{-38}{70} = \frac{19}{35}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{19}{35}\right) \approx 57,12^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (44,42^\circ + 57,12^\circ) = 78,46^\circ$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma) \approx \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(78,46^\circ) = 14,70$$

- 2) La formule $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ fournit

$$\sin(\beta) = \frac{b \sin(\alpha)}{a} = \frac{7 \cdot \sin(35^\circ)}{5}$$

On en déduit :

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{7 \cdot \sin(35^\circ)}{5}\right) \approx 53,42^\circ$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1) \approx 180^\circ - (35^\circ + 53,42^\circ) = 91,58^\circ$$

$$c_1 = \frac{a \sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha)} \approx \frac{5 \sin(91,58^\circ)}{\sin(35^\circ)} = 8,71$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma_1) \approx \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin(91,58^\circ) = 17,49$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 180^\circ - 53,42^\circ = 126,58^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta_2) \approx 180^\circ - (35^\circ + 126,58^\circ) = 18,42^\circ$$

$$c_2 = \frac{a \sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha)} \approx \frac{5 \sin(18,42^\circ)}{\sin(35^\circ)} = 2,75$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma_2) \approx \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin(18,42^\circ) = 5,53$$

- 3) L'égalité $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$ délivre

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)} = \sqrt{4^2 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cos(54^\circ)} \approx 7,39$$

De $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$ on tire que

$$\cos(\beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \approx \frac{9^2 - 4^2 - 7,39^2}{-2 \cdot 4 \cdot 7,39} = -0,174462$$

$$\beta \approx \arccos(0,174462) = 100,05^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (54^\circ + 100,05^\circ) = 25,95^\circ$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \sin(54^\circ) \approx 14,56$$

- 4) $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$

La formule $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ conduit à

$$a = \frac{c \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{8 \cdot \sin(40^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 5,94$$

De même, la formule $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ donne

$$b = \frac{c \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{8 \cdot \sin(80^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 9,10$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha) \approx \frac{1}{2} \cdot 9,10 \cdot 8 \cdot \sin(40^\circ) = 23,39$$

5) L'égalité $\mathcal{A} = \frac{1}{2} a b \sin(\gamma)$ délivre

$$\sin(\gamma) = \frac{2\mathcal{A}}{ab} = \frac{2 \cdot 12}{6 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53,13^\circ$$

$$c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma_1)} \approx \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos(53,13^\circ)} = 5,00$$

$$\cos(\alpha_1) = \frac{a^2 - b^2 - c_1^2}{-2bc_1} \approx \frac{6^2 - 5^2 - 5,00^2}{-2 \cdot 5 \cdot 5,00} = 0,28$$

$$\alpha_1 \approx \arccos(0,28) = 73,74^\circ$$

$$\beta_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \gamma_1) \approx 180^\circ - (53,13^\circ + 73,74^\circ) = 53,13^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \approx 180^\circ - 53,13^\circ = 126,87^\circ$$

$$c_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma_2)} \approx \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos(126,87^\circ)} = 9,85$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{a^2 - b^2 - c_2^2}{-2bc_2} \approx \frac{6^2 - 5^2 - 9,85^2}{-2 \cdot 5 \cdot 9,85} = 0,873198$$

$$\alpha_2 \approx \arccos(0,873198) = 29,17^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - (\alpha_2 + \gamma_2) \approx 180^\circ - (29,17^\circ + 126,87^\circ) = 23,96^\circ$$

6) L'identité $\mathcal{A} = \frac{1}{2} b c \sin(\alpha)$ implique

$$c = \frac{2\mathcal{A}}{b \sin(\alpha)} = \frac{2 \cdot 10}{4 \cdot \sin(70^\circ)} \approx 5,32$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)} \approx \sqrt{4^2 + 5,32^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5,32 \cdot \cos(70^\circ)} = 5,45$$

$$\cos(\beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \approx \frac{4^2 - 5,45^2 - 5,32^2}{-2 \cdot 5,45 \cdot 5,32} = 0,724670$$

$$\beta \approx \arccos(0,724670) = 43,56^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (70^\circ + 43,56^\circ) = 66,44^\circ$$

7) $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (42^\circ + 63^\circ) = 75^\circ$

$$\text{L'égalité } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \text{ donne } b = \frac{a \sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

En substituant cette expression de b dans la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2} a b \sin(\gamma)$, on obtient :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \frac{a \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \sin(\gamma) = \frac{a^2 \sin(\beta) \sin(\gamma)}{2 \sin(\alpha)}$$

$$\text{On en déduit : } a^2 = \frac{2\mathcal{A} \sin(\alpha)}{\sin(\beta) \sin(\gamma)} \text{ et aussi :}$$

$$a = \sqrt{\frac{2\mathcal{A} \sin(\alpha)}{\sin(\beta) \sin(\gamma)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot \sin(42^\circ)}{\sin(63^\circ) \cdot \sin(75^\circ)}} \approx 4,83$$

$$b = \frac{a \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \approx \frac{4,83 \cdot \sin(63^\circ)}{\sin(42^\circ)} = 6,43$$

$$c = \frac{a \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} \approx \frac{4,83 \cdot \sin(75^\circ)}{\sin(42^\circ)} = 6,97$$

8) En remplaçant les données numériques dans la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2} a b \sin(\gamma)$, on obtient :

$$6 = \frac{1}{2} a b \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} a b \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Il en résulte } b = 6 \cdot \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{3} a} = \frac{24}{\sqrt{3} a} = \frac{24\sqrt{3}}{3a} = \frac{8\sqrt{3}}{a}$$

En substituant cette expression de b et les données numériques dans la formule $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$, il suit que :

$$4^2 = a^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{a}\right)^2 - 2a \cdot \frac{8\sqrt{3}}{a} \cdot \frac{1}{2}$$

$$16 = a^2 + \frac{192}{a^2} - 8\sqrt{3}$$

$$a^2 - (16 + 8\sqrt{3}) + \frac{192}{a^2} = 0$$

$$a^4 - (16 + 8\sqrt{3})a^2 + 192 = 0$$

Réolvons cette équation bicarrée :

$$\Delta = (16 + 8\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 192 = 256\sqrt{3} - 320 = 8^2 \cdot (4\sqrt{3} - 5)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8^2 \cdot (4\sqrt{3} - 5)} = 8\sqrt{4\sqrt{3} - 5}$$

$$a_1^2 = \frac{16+8\sqrt{3}-8\sqrt{4\sqrt{3}-5}}{2} = 8+4\sqrt{3}-4\sqrt{4\sqrt{3}-5} = 2^2 \cdot (2 + \sqrt{3} - \sqrt{4\sqrt{3}-5})$$

$$\text{Vu que } a_1 > 0, \text{ on a } a_1 = 2\sqrt{2 + \sqrt{3} - \sqrt{4\sqrt{3}-5}} \approx 3,06$$

$$a_2^2 = \frac{16+8\sqrt{3}+8\sqrt{4\sqrt{3}-5}}{2} = 8+4\sqrt{3}+4\sqrt{4\sqrt{3}-5} = 2^2 \cdot (2 + \sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt{3}-5})$$

$$\text{Vu que } a_2 > 0, \text{ on a } a_2 = 2\sqrt{2 + \sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt{3}-5}} \approx 4,53$$

La formule de substitution $b = \frac{8\sqrt{3}}{a}$ implique $(ab)^2 = (8\sqrt{3})^2 = 192 = a_1^2 a_2^2 = (a_1 a_2)^2$ au vu de la formule de Viète.

En d'autres termes, les deux solutions possibles reviennent à échanger les côtés a et b du triangle recherché, si bien qu'il n'y a qu'un seul triangle qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

On choisira arbitrairement $a = a_1 \approx 3,06$ et $b = a_2 \approx 4,53$.

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \approx \frac{3,06^2 - 4,53^2 - 4^2}{-2 \cdot 4,53 \cdot 4} = 0,748734$$

$$\alpha \approx \arccos(0,748734) = 41,52^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 180^\circ - (41,52^\circ + 60^\circ) = 78,48^\circ$$