18 Équations trigonométriques

La construction du cercle trigonométrique implique $\cos(\alpha + 2\,\pi) = \cos(\alpha)$.
L'exercice 15.14 a établi la formule $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.
Il résulte de ces deux propriétés que l'équation

$$\cos(x) = \cos(\alpha)$$

admet deux familles de solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\alpha + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

18.1 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

1) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ 2) $\cos(\frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}$ 3) $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

La construction du cercle trigonométrique implique $\sin(\alpha + 2\,\pi) = \sin(\alpha)$.
L'exercice 15.14 a établi la formule $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$.
Il résulte de ces deux propriétés que l'équation

$$\sin(x) = \sin(\alpha)$$

admet deux familles de solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \pi - \alpha + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

18.2 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

1) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\sin(\frac{2\,x}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sin(\frac{2\,x}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La propriété $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$ établie à l'exercice 15.14 fait que l'équation

$$\tan(x) = \tan(\alpha)$$

admet une famille de solutions :

$$x = \alpha + k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

18.3 Résoudre l'équation $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ en donnant les solutions en radians.

18.4 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

1) $2\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = -1$
2) $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1$
3) $\sin(3x) = \sin(2x)$
4) $\cos(2x) = \cos(4x)$

18.5 En utilisant les formules $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$, résoudre les équations suivantes :

1) $\cos(2x) = \sin(3x)$
2) $\sin(2x) = \cos(3x + \frac{\pi}{4})$
3) $\cos(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 4x)$
4) $\sin(\frac{4x}{3}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$

18.6 On considère l'équation $\cos(x) - \sin(x) = 1$. On pose $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.

1) Justifier que $(a\,;b)$ est solution du système $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$.
2) Déterminer les valeurs de a et b solutions de ce système.
3) En déduire les solutions de l'équation $\cos(x) - \sin(x) = 1$.

18.7 En appliquant la même méthode qu'à l'exercice précédent, résoudre les équations suivantes :

1) $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}$
2) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1$

18.8 Résoudre les équations suivantes :

1) $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$
2) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$
3) $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$
4) $\tan^4(x) - 4\tan^2(x) + 3 = 0$

Réponses

18.1

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{4\pi}{3} + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\pi + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

18.2

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = \frac{3\pi}{8} + 3k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{9\pi}{8} + 3k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = 3k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

18.3 $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

18.4

1) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2) $x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) $\begin{cases} x_1 = 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 = k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{k\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

18.5

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{k\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 = -\frac{3\pi}{5} + \frac{12k\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{3\pi}{11} + \frac{12k\pi}{11} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

18.6

1) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ 2) $\mathrm{S} = \{(1\,;0)\,;(0\,;-1)\}$

3) $\begin{cases} x_1 = 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

18.7

1) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ 2) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

18.8

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$