**16.4** 1) L'égalité $2\sin(3x+\frac{\pi}{6})=-1$ équivaut à $\sin(3x+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$.

Or, $\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$, de sorte que :

$$\begin{cases} 3x_1+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ 3x_2+\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

En retirant $\frac{\pi}{6}$ aux membres de ces égalités, on obtient :

$$\begin{cases} 3x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ 3x_2 = \pi + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

En divisant par 3 ces équations, on conclut :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

2) Vu que $\cos(0)=1$, on a :

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

L'addition de $\frac{\pi}{4}$ donne :

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

En multipliant cette équation par 2, il appert que :

$x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

3) L'égalité $\sin(3x)=\sin(2x)$ implique :

$$\begin{cases} 3x_1 = 2x_1 + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ 3x_2 = \pi-2x_2 + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

En soustrayant $2x_1$ dans la première équation et en ajoutant $2x_2$ dans la seconde, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ 5x_2 = \pi + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Enfin, en divisant la seconde équation par 5, on a :

$$\begin{cases} x_1 = 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

4) L'identité $\cos(2x)=\cos(4x)$ conduit à :

$$\begin{cases} 2x_1 = 4x_1 + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ 2x_2 = -4x_2 + 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

La soustraction de $4x_1$ dans la première équation et l'addition de $4x_2$ dans la seconde donnent :

$$\begin{cases} -2x_1 = 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ 6x_2 = 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

En divisant ces équations respectivement par $-2$ et 6, on conclut à :

$$\begin{cases} x_1 = -k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} = k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{k\pi}{3} \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$