16.7 1) En posant $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$, il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} b - a = \sqrt{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

La première équation fournit $b = a + \sqrt{2}$ que l'on substitue dans la seconde :

$1 = a^2 + (a + \sqrt{2})^2 = a^2 + (a^2 + 2\sqrt{2}\,a + 2) = 2\,a^2 + 2\sqrt{2}\,a + 2$

$2\,a^2 + 2\sqrt{2}\,a + 1 = 0$

$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8 - 8 = 0$

$a = \frac{-2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$b = a + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'équation $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}$ se ramène par conséquent aux égalités

$$\begin{cases} \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

À partir du cercle trigonométrique, on conclut aux solutions

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) En posant $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$, il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

La seconde équation délivre $b = \sqrt{3}\,a - 1$ que l'on remplace dans la seconde :

$1 = a^2 + (\sqrt{3}\,a - 1)^2 = a^2 + (3\,a^2 - 2\sqrt{3}\,a + 1) = 4\,a^2 - 2\sqrt{3}\,a + 1$

On en infère $0 = 4\,a^2 - 2\sqrt{3}\,a = 2\,a\,(2\,a - \sqrt{3})$, d'où suivent deux possibilités :

(a) $a = 0$ et $b = \sqrt{3} \cdot 0 - 1 = -1$, c'est-à-dire $\begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(x) = -1 \end{cases}$

Grâce au cercle trigonométrique, on déduit que $x = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\begin{cases} \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

La contemplation du cercle trigonométrique aboutit à $x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

En résumé, l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1$ possède deux familles de solutions :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$