16.8 1) En posant $a = \cos(x)$, il s'agit de résoudre :

$4\,a^2 - 4\,a - 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 64 = 8^2$

$a_1 = \frac{-(-4)-8}{2\cdot 4} = -\frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{-(-4)+8}{2\cdot 4} = \frac{3}{2}$

Il y a ainsi deux équations à résoudre :

(a) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ implique $\begin{cases} x_1 = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(b) $\cos(x) = \frac{3}{2}$ est impossible, car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En conclusion, les solutions de l'équation $4\,\cos^2(x) - 4\,\cos(x) - 3 = 0$ sont $\begin{cases} x_1 = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

2) En posant $b = \sin(x)$, on se ramène à résoudre :

$2\,b^2 - 3\,b + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 = 1^2$

$b_1 = \frac{-(-3)+1}{2\cdot 2} = 1 \qquad b_2 = \frac{-(-3)-1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$

Il s'agit dès lors de résoudre deux équations :

(a) $\sin(x) = 1$ donne $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \pi - \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Puisque $x_1 = x_2$, on a en définitive une unique famille de solutions $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ implique $\begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} = \frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

En résumé, les solutions de l'équation $2\,\sin^2(x) - 3\,\sin(x) + 1 = 0$ sont

$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) La formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donne $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ que l'on remplace dans l'équation à résoudre :

$3\left(1 - \cos^2(x)\right) + \cos^2(x) - 2 = 1 - 2\,\cos^2(x) = 1^2 - \left(\sqrt{2}\,\cos(x)\right)^2 =$

$\left(1 - \sqrt{2}\,\cos(x)\right)\left(1 + \sqrt{2}\,\cos(x)\right) = 0$

On en tire que $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(a) Si $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

(b) Si $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\begin{cases} x_3 = \frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

En conclusion, les solutions de l'équation $3\,\sin^2(x)+\cos^2(x)-2=0$ sont
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

4) Si l'on pose $t=\tan(x)$, alors il convient de résoudre :
$0=t^4-4\,t^2+3=(t^2-1)\,(t^2-3)=(t-1)\,(t+1)\,(t-\sqrt{3})\,(t+\sqrt{3})$

(a) Si $t=\tan(x)=1$, alors $x_1=\frac{\pi}{4}+k\,\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

(b) Si $t=\tan(x)=-1$, alors $x_2=-\frac{\pi}{4}+k\,\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

(c) Si $t=\tan(x)=\sqrt{3}$, alors $x_3=\frac{\pi}{3}+k\,\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

(d) Si $t=\tan(x)=-\sqrt{3}$, alors $x_4=-\frac{\pi}{3}+k\,\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Par conséquent, les solutions de l'équation $\tan^4(x)-4\,\tan^2(x)+3=0$ sont
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{\pi}{3} + k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\,\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$