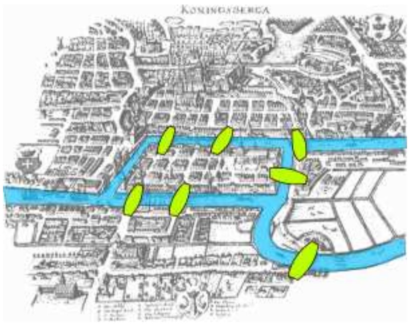
1 Introduction

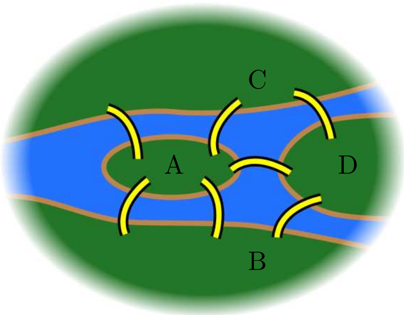
Problèmes historiquement célèbres

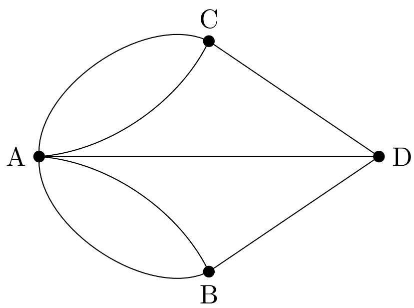
Les ponts de Könisberg

Le problème des ponts de Könisberg est à l'origine de la théorie des graphes. Cette ville de Prusse orientale est bâtie sur les bords d'une rivière ainsi que sur deux îles. Le problème consiste à trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg.



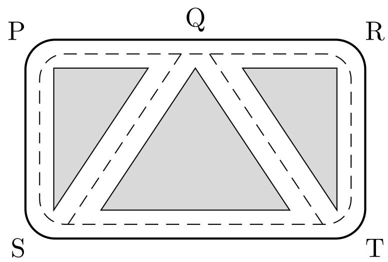
Personne n'ayant trouvé de solution, on se tourna vers le plus grand mathématicien de l'époque, Leonhard Euler. L'article qu'il publia en 1741 montre que l'on peut schématiser la situation (les deux îles, les deux bords et les sept ponts) par un diagramme que l'on appelle **graphe** :





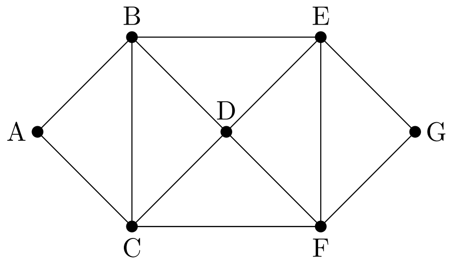
Euler a démontré que pour résoudre ce problème, il suffit de mettre en évidence certaines propriétés du graphe.

1.1 Dessiner le graphe représentant les chemins de la figure suivante et préciser le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le degré de chaque sommet.



Le voyageur de commerce

De prime abord, le problème du voyageur de commerce s'apparente à celui des ponts de Könisberg. Considérons par exemple 7 villes A, B, C, D, E, F et G reliées entre elles par des routes selon le diagramme ci-dessous :

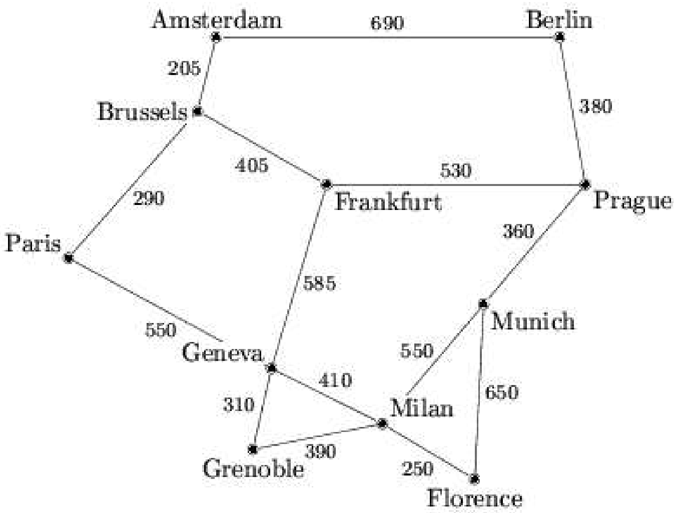


Est-il possible de trouver un trajet qui, commençant et se terminant par A, passe exactement une fois par chacune des villes B, C, D, E, F et G ?

La forme plus moderne de ce problème est attribuée à Hassler Whitney et se rapproche de la situation réelle du voyageur de commerce. Dans un graphe comme ci-dessus, on attribue à chaque arête un nombre positif (correspondant à la distance, au coût, au temps, etc.) et l'on cherche un circuit fermé minimal ne passant qu'une fois par chaque sommet.

Ce problème n'a toujours pas de solution générale, bien que des solutions dans des cas particuliers aient été trouvées.

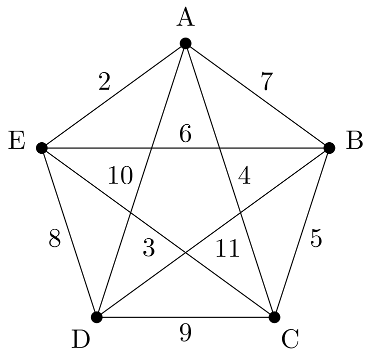
La question d'optimiser (rendre minimal ou maximal) une quantité apparaît souvent en recherche opérationnelle. Considérons par exemple un voyageur désirant aller en voiture d'Amsterdam à Florence. Il a en main le graphe suivant qui donne les distances pour relier deux villes voisines.



Quel itinéraire doit-il prendre pour rendre le trajet le plus court possible ?

La découverte d'un algorithme permettant de traiter ce genre de problèmes n'a été faite qu'en 1959.

1.2 Un gardien de zoo, commençant sa visite par les antilopes, veut encore passer chez les boas, les cerfs, les dromadaires et les éléphants. Ces lieux sont notés respectivement par A, B, C, D et E. Les distances sont indiquées sur le diagramme.



Trouver l'itinéraire le plus court possible commençant et finissant par A.

Coloriage des cartes

Considérons, par exemple, la carte des États-Unis sans l'Alaska ni Hawaï.

On colorie ce genre de cartes en sorte que deux régions (ici des États) voisines aient une couleur différente. La question de savoir combien de couleurs sont nécessaires a été posée pour la première fois par Francis Guthrie en 1852 et a fait depuis l'objet de nombreuses recherches par des mathématiciens de renom (Morgan, Cayley, Kempe).

En fait, il est assez facile de montrer que cinq couleurs suffisent toujours quelle que soit la carte, mais pas trois couleurs. On le voit en considérant l'anneau des cinq États qui entourent le Nevada. Cet anneau nécessite au moins trois couleurs et le Nevada en a besoin d'une autre, d'où un minimum de quatre.

Ainsi le problème du coloriage des cartes est devenu pendant longtemps le célèbre problème des quatre couleurs : toute carte peut-elle être coloriée avec quatre couleurs ?

Il aura fallu attendre 1976 pour que deux mathématiciens, Kenneth Appel et Wolfgang Haken, utilisant plusieurs milliers d'heures d'ordinateur, trouvent une preuve longue de plusieurs centaines de pages avec plus de 20 000 configurations. Le célèbre problème était enfin résolu.

En dualisant le problème, c'est-à-dire en remplaçant chaque pays par un sommet et chaque frontière commune par une arête entre les deux pays concernés, on obtient un graphe. Le problème du coloriage des cartes se transforme en un problème du coloriage des sommets.

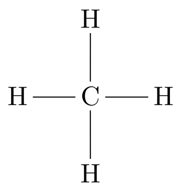
Chimie moléculaire

À l'époque de la Révolution française, on dessinait déjà des diagrammes ressemblant à des graphes pour décrire les molécules.

Mais ce n'est que dans les années 1850, sous l'influence de savants comme Auguste Kekule et Crum Brown, quand on eut compris un peu mieux la théorie des liaisons chimiques (théorie de la valence), que les graphes furent utilisés plus largement.

Cependant, de telles représentations ignorent en général la structure spatiale de la molécule.

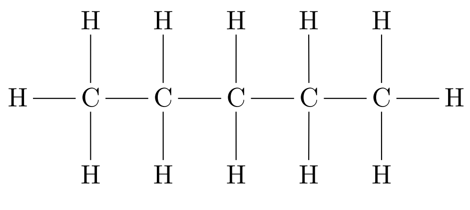
Par exemple, la molécule de méthane CH_4, représentée par le diagramme ci-contre, n'a pas une structure planaire. En effet, la stéréochimie nous enseigne que l'atome de carbone C est situé au centre d'un tétraèdre régulier dont les quatre sommets sont les atomes d'hydrogène H.



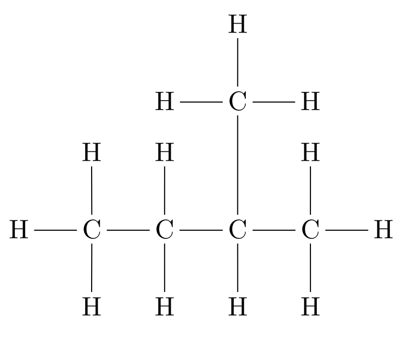
Néanmoins ce mode de représentation s'est avéré utile pour illustrer comment les différents atomes sont reliés entre eux et pour obtenir ainsi des informations sur le comportement chimique de telle ou telle molécule.

La connaissance de la formule chimique d'une molécule ne permet pas toujours de déterminer complètement toutes ses propriétés chimiques. Cela est dû à l'existence d'isomères, c'est-à-dire à des molécules ayant les mêmes atomes et les mêmes liaisons, mais arrangés différemment.

Voici, par exemple, deux isomères de C_5H_{12} :



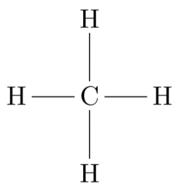
pentane



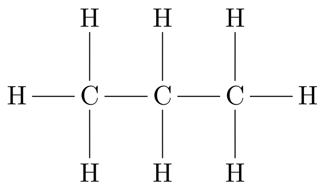
isopentane

Rappelons qu'un atome d'hydrogène H n'a qu'un électron et qu'il ne peut se lier dans une molécule qu'à un seul atome. En revanche, l'atome de carbone C a quatre électrons disponibles dans sa couche périphérique et peut se lier avec au plus quatre autres atomes.

1.3 La figure ci-dessous représente une molécule de méthane CH_4 ainsi qu'une molécule de propane C_3H_8.



méthane



propane

1) En considérant ces diagrammes comme des graphes, que peut-on dire des sommets correspondant aux atomes de carbone et aux atomes d'hydrogène ?
2) Représenter les graphes correspondant aux deux isomères de C_4H_{10}.
3) Montrer que C_5H_{12} a un troisième isomère.

Autres exemples d'application

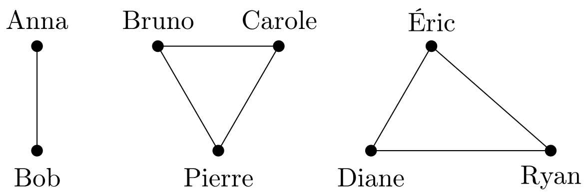
L'intérêt de la théorie des graphes réside dans sa capacité à pouvoir modéliser par des diagrammes géométriques qu'on appelle **graphes**, des relations et arrangements entre divers éléments d'une situation donnée.

L'étude des propriétés de ces diverses configurations permet de répondre à certaines questions se rapportant à la situation initiale.

Exemple

Supposons qu'à la rentrée vous vous joignez à une nouvelle classe. Vous observez que certains élèves se connaissent et d'autres pas. Une manière synthétique de présenter cette situation est de la modéliser ainsi :

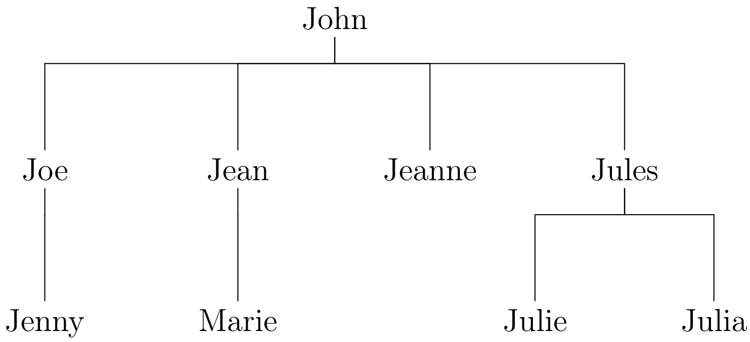
– chaque élève est représenté par un point ;
– deux élèves qui se connaissent sont reliés par un segment.



1.4 John est ami avec Johanna, Jean et Jeanne ; Joe l'est avec Jeanne et Johanna ; Jean et Johanna s'aiment l'un l'autre.

Dessiner un digraphe (c'est-à-dire un graphe dont les arêtes sont orientées) illustrant les relations entre John, Johanna, Jean, Jeanne et Joe.

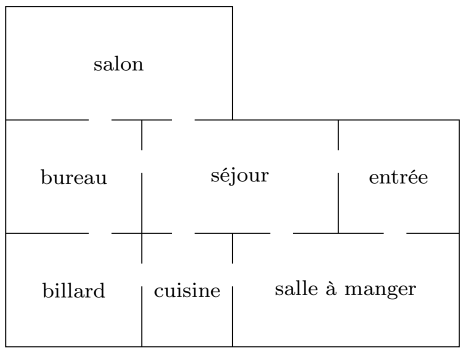
1.5 Dessiner le graphe correspondant à l'arbre généalogique suivant :



1.6 Les serpents mangent les grenouilles et les oiseaux mangent des araignées ; les oiseaux et les araignées mangent tous deux des insectes. Les grenouilles mangent des escargots, des araignées et des insectes.

Dessiner un digraphe représentant le comportement alimentaire de ces prédateurs.

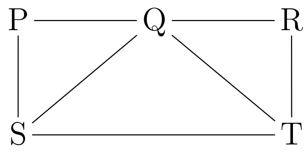
1.7 Voici le plan d'un logement :



Schématiser par un graphe le plan de circulation de ce logement.

Réponses

1.1



5 sommets 7 arêtes

sommet	P	Q	R	S	T
degré	2	4	2	3	3

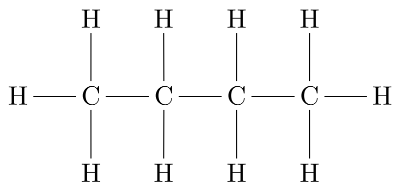
1.2 A → C → B → D → E → A ou A → E → D → B → C → A

Le second itinéraire correspond au premier itinéraire en sens inverse.

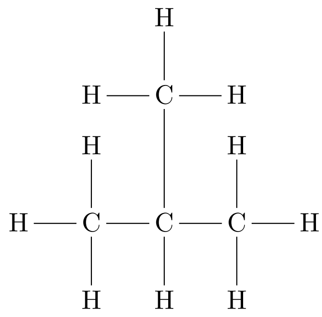
1.3

1) Les sommets correspondant aux atomes de carbone sont de degré 4 et ceux correspondant aux atomes d'hydrogène de degré 1.

2)

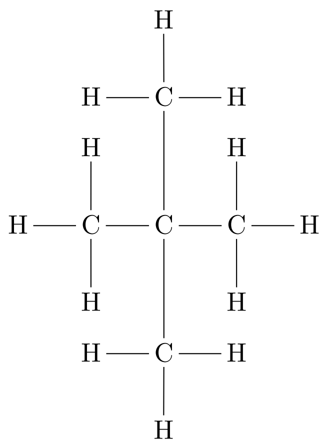


butane



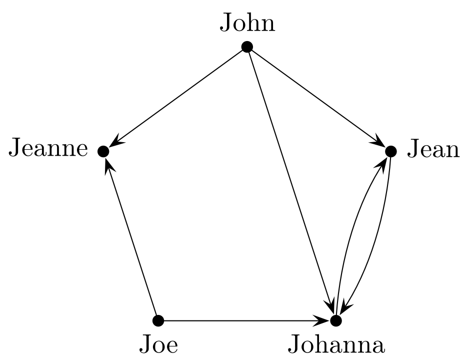
isobutane

3)

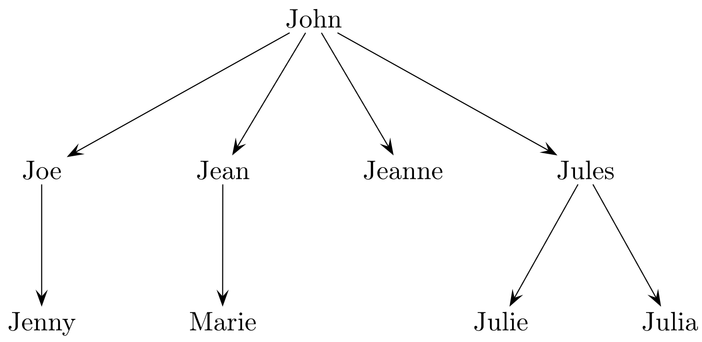


neopentane

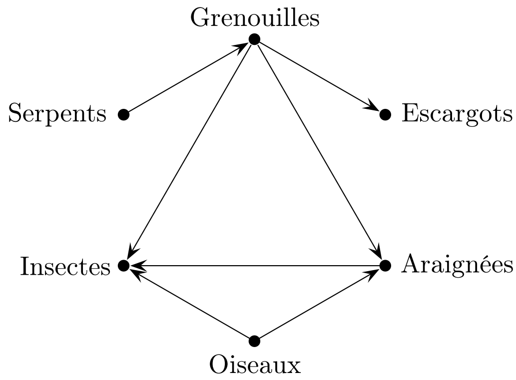
1.4



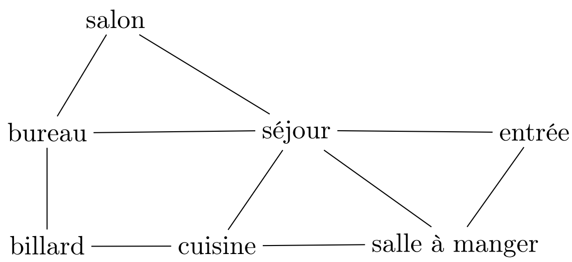
1.5


John
Joe
Jean
Jeanne
Jules
Jenny
Marie
Julie
Julia

1.6


Grenouilles
Serpents
Escargots
Insectes
Araignées
Oiseaux

1.7


salon
bureau
séjour
entrée
billard
cuisine
salle à manger