2 Concepts élémentaires

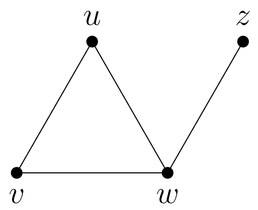
Définitions

Un **graphe** $\mathrm{G} = (\mathrm{V}\,;\mathrm{E})$ est la donnée :
- — d'un ensemble fini V dont les éléments sont appelés les **sommets** (*vertices* en anglais) de G ;
- — d'une famille E de paires non ordonnées de sommets de V (non nécessairement distincts) appelés les **arêtes** (*edges* en anglais) de G.

On utilise le terme « famille » pour signifier une collection d'éléments dont certains peuvent apparaître plusieurs fois. Par exemple, $\{a\,;b\,;c\}$ est un ensemble, mais $\{a\,;a\,;b\,;c\,;a\,;c\}$ ne l'est pas ; c'est une famille dans le sens ci-dessus.

Exemples

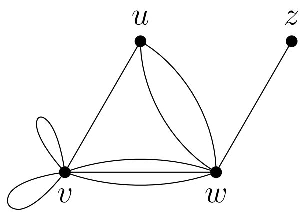
1)



$\mathrm{V} = \{u\,;v\,;w\,;z\}$

$\mathrm{E} = \{uv\,;uw\,;vw\,;wz\}$

2)

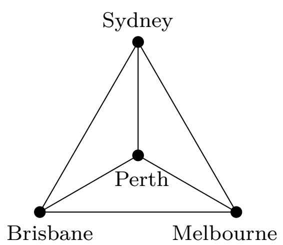


$\mathrm{V} = \{u\,;v\,;w\,;z\}$

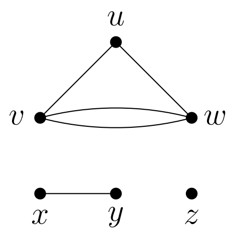
$\mathrm{E} = \{uv\,;vv\,;vv\,;vw\,;vw\,;vw\,;uw\,;uw\,;wz\}$

2.1 Écrire l'ensemble des sommets et la famille des arêtes des graphes suivants :

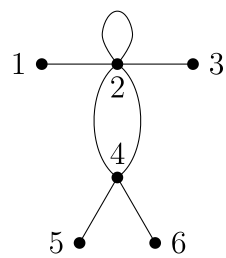
1)



2)



3)



2.2 Dessiner les graphes suivants :

1) $\mathrm{V} = \{\square\,;\bigcirc\,;\lozenge\,;\triangle\}$ $\quad$ $\mathrm{E} = \{\square\bigcirc\,;\bigcirc\lozenge\,;\bigcirc\triangle\,;\lozenge\triangle\}$

2) $\mathrm{V} = \{\mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\}$ $\quad$ $\mathrm{E} = \varnothing$

3) $\mathrm{V} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$ $\quad$ $\mathrm{E} = \{12\,;22\,;23\,;34\,;35\,;67\,;68\,;78\}$

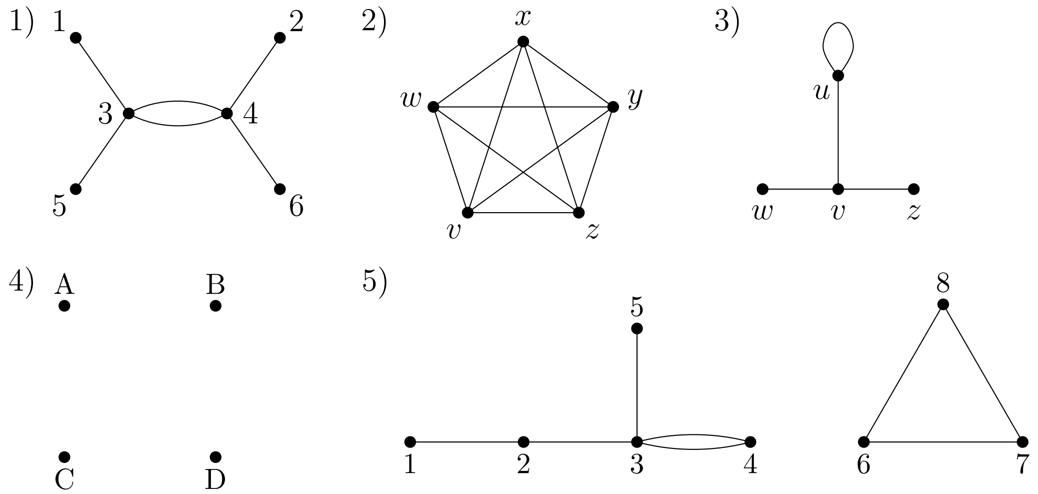
Deux sommets u et v d'un graphe sont dits **voisins** si uv est une arête de G.

Un graphe est dit **simple** s'il ne contient ni arêtes multiples reliant deux sommets, ni boucles.

Ainsi, le graphe de l'exemple 1) est simple, alors que celui de l'exemple 2) ne l'est pas.

On appelle **ordre** d'un graphe $G = (V\,;E)$ le nombre de ses sommets ; on le note $|V|$.

2.3 On considère les graphes suivants :

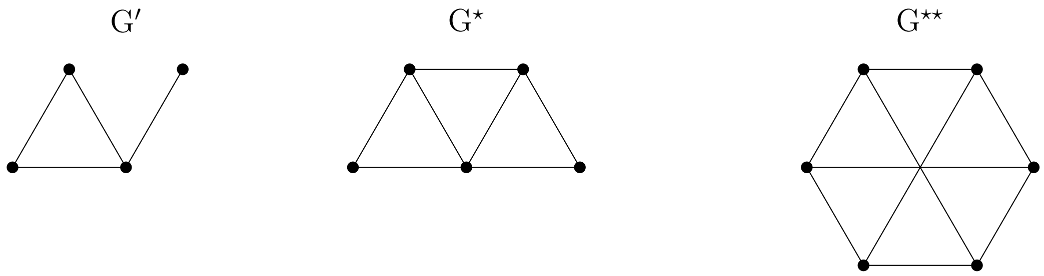


Parmi ces graphes, lesquels

1) contiennent des arêtes multiples ?
2) contiennent une boucle ?
3) sont simples ?

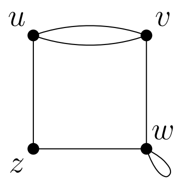
Un **sous-graphe** G' d'un graphe G est un graphe tel que chaque sommet et chaque arête de G' soient un sommet et une arête de G.

Exemple

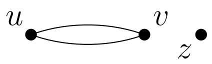


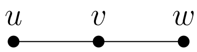
G' est un sous-graphe de $G^\star$, mais pas de $G^{\star\star}$.

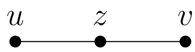
2.4 Soit G le graphe étiqueté suivant :

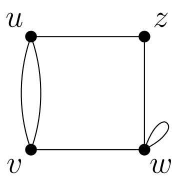


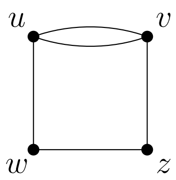
Lesquels de ces graphes sont des sous-graphes de G ?

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

Degré des sommets

Soit G = (V ; E) un graphe. Le **degré** d'un sommet $x \in \mathrm{V}$ est le nombre d'arêtes de G contenant x ; on le note $\deg(x)$.

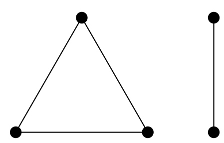
On convient que, lorsqu'il y a une boucle, elle contribue pour 2 (plutôt que 1) au degré de x.

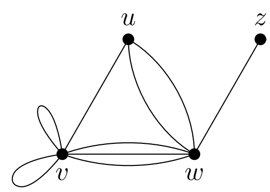
Un sommet de degré 0 est dit **isolé** et un sommet de degré 1 une **extrémité** du graphe.

Soit G = (V ; E) un graphe d'ordre n. À chaque sommet x_k, on peut faire correspondre son degré d_k. Quitte à renuméroter les sommets de G, on peut toujours les ordonner de façon à ce que la suite des degrés correspondants soit dans un ordre décroissant. La suite $(d_1, \ldots, d_n)$ ordonnée par ordre décroissant s'appelle la **liste des degrés** du graphe G. On dit alors que le graphe G est de **type** $(d_1, \ldots, d_n)$.

Exemples

1)

2) 

3) 

Dans les exemples 1) et 2) ci-dessus, chacun des graphes a deux sommets de degré 1 et trois sommets de degrés 2. Dans l'exemple 3), il y a un sommet de degré 1, un de degré 3, un de degré 6 et un de degré 8.

La liste des degrés des deux premiers graphes est donc $(2, 2, 2, 1, 1)$ et celle du troisième graphe est $(8, 6, 3, 1)$.

2.5 Pour chacun des graphes de l'exercice 2.3, donner

1) les degrés de tous les sommets ;
2) la liste des degrés.

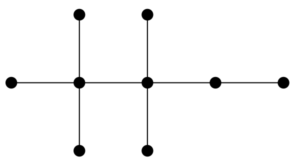
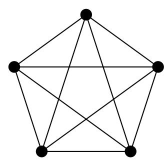
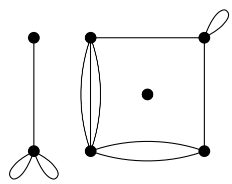
Lemme des poignées de mains

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe $G = (V\,;E)$ *est égale à deux fois le nombre de ses arêtes :*

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2\,|E|$$

Preuve Chaque arête du graphe incrémente de deux la somme des degrés.

2.6 Écrire la liste des degrés de chacun des graphes suivants :

1)  2)  3) 

Vérifier le lemme des poignées de mains pour chacun de ces graphes.

2.7 Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Indication : appliquer le lemme des poignées de mains.

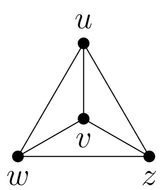
2.8 Montrer que dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

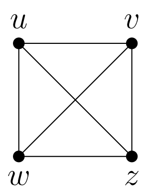
Indication : Soit $G = (V\,;E)$ un graphe. Notons P l'ensemble des sommets de degré pair et I l'ensemble des sommets de degré impair. Alors $\displaystyle\sum_{x \in V} \deg(x) = \sum_{x \in P} \deg(x) + \sum_{x \in I} \deg(x)$.

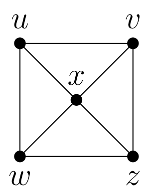
2.9
1) Construire un graphe tel que sa liste des degrés soit $(4, 3, 2, 1)$.
2) Est-il possible de construire un graphe tel que sa liste des degrés soit $(5, 4, 3, 2, 1)$?

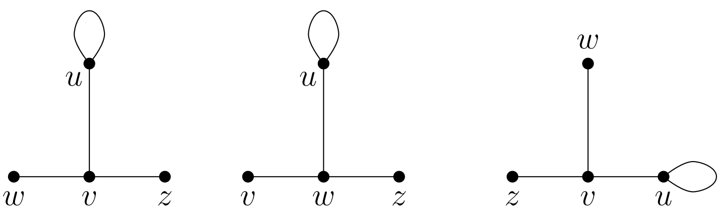
Isomorphisme de graphes

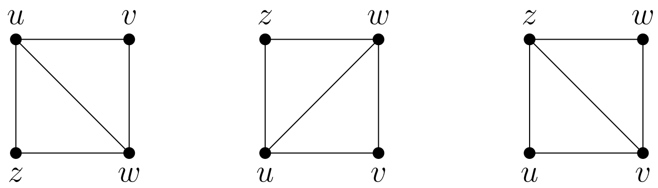
2.10 Dans chacune des lignes suivantes, deux des graphes sont identiques et le troisième est différent. Identifier l'intrus.

1) 

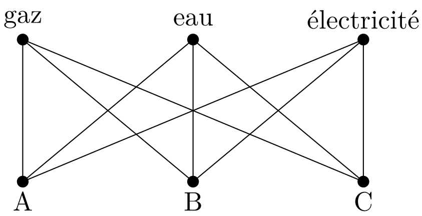


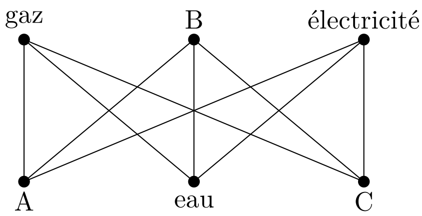


2) 

3) 

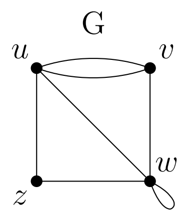
Considérons les deux graphes suivants :

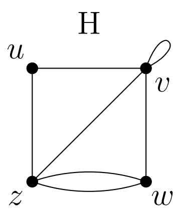




Ces deux graphes ne sont pas identiques, puisque le gaz et l'eau sont reliés dans le second, mais pas dans le premier. Pourtant, ils ont l'air très semblables : en permutant eau avec la lettre B, on passe d'un graphe à l'autre.

De la même manière, dans les graphes suivants :





on peut re-étiqueter les sommets de G pour obtenir le graphe H.

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{H} \\ u &\longmapsto z \\ v &\longmapsto w \\ w &\longmapsto v \\ z &\longmapsto u \end{aligned}$$

Notons que

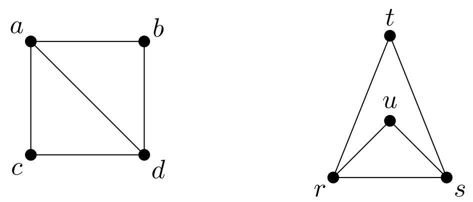
— les deux arêtes uv dans G correspondent aux deux arêtes zw dans H ;
— l'arête uw dans G correspond à l'arête zv dans H ;
— la boucle en w dans G correspond à la boucle en v dans H ;

etc.

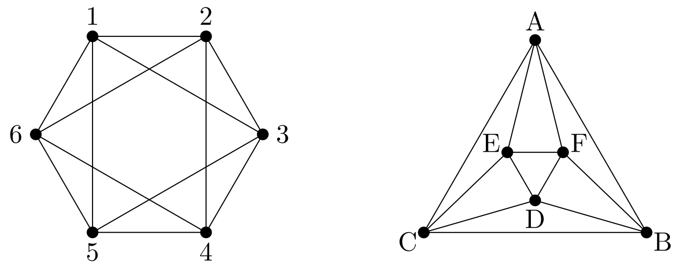
Deux graphes étiquetés G et H sont dits **isomorphes** [1] s'il existe une bijection entre les sommets de G et ceux de H de telle sorte que le nombre d'arêtes joignant chaque paire de sommets de G soit égal au nombre d'arêtes joignant les paires correspondantes de sommets de H.

1. Ce terme est construit à partir de deux mots grecs : ἴσος et μορφή qui signifient « même » et « forme ». Il veut donc dire avoir la même forme.

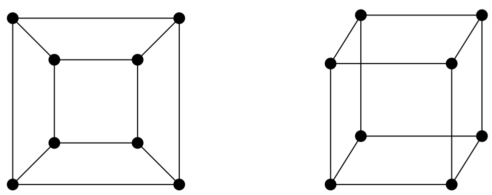
2.11 En explicitant une bijection entre les sommets, montrer que les graphes suivants sont isomorphes.



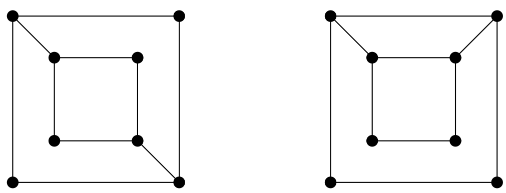
2.12 En explicitant une bijection entre les sommets, montrer que les graphes suivants sont isomorphes.



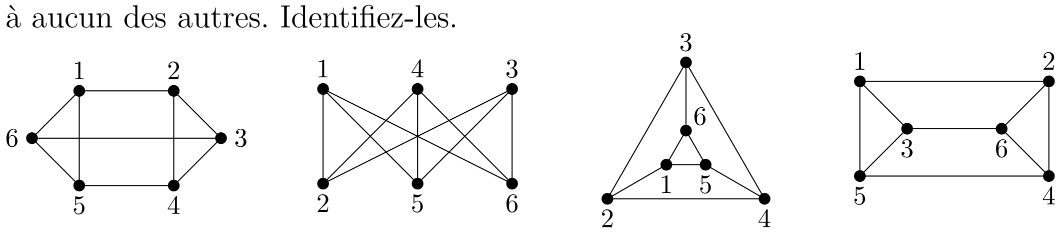
2.13 En étiquetant convenablement les sommets, montrer que les graphes suivants sont isomorphes.



2.14 Expliquer pourquoi les deux graphes ne sont pas isomorphes.



2.15 Parmi les quatre graphes étiquetés suivants, il y en a deux qui sont identiques, un qui est isomorphe aux deux précédents et le dernier qui n'est pas isomorphe à aucun des autres. Identifiez-les.

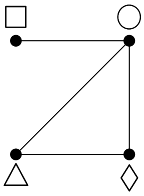
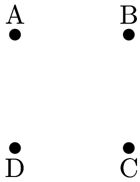


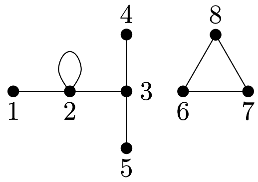
Réponses

2.1 1) Posons B = Brisbane, M = Melbourne, P = Perth et S = Sydney.
$V = \{B\,;M\,;P\,;S\}$ $\quad E = \{BM\,;BP\,;BS\,;MP\,;MS\,;PS\}$

2) $V = \{u\,;v\,;w\,;x\,;y\,;z\}$ $\quad E = \{uv\,;uw\,;vw\,;vw\,;xy\}$

3) $V = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ $\quad E = \{12\,;22\,;23\,;24\,;24\,;45\,;46\}$

2.2 1) 
2) 

3) 

2.3 1) graphes 1) et 5) 2) graphe 3) 3) graphes 2) et 4)

2.4 graphes 1), 2) et 4)

2.5 1) $\deg(1) = \deg(2) = \deg(5) = \deg(6) = 1$, $\deg(3) = \deg(4) = 4$
$(4, 4, 1, 1, 1, 1)$

2) $\deg(v) = \deg(w) = \deg(x) = \deg(y) = \deg(z) = 4$
$(4, 4, 4, 4, 4)$

3) $\deg(u) = \deg(v) = 3$, $\deg(w) = \deg(z) = 1$
$(3, 3, 1, 1)$

4) $\deg(A) = \deg(B) = \deg(C) = \deg(D) = 0$
$(0, 0, 0, 0)$

5) $\deg(1) = \deg(5) = 1$, $\deg(2) = \deg(4) = \deg(6) = \deg(7) = \deg(8) = 2$, $\deg(3) = 4$ $\quad (4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

2.6 1) $(4, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ $\quad 4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 8$

2) $(4, 4, 4, 4, 4)$ $\quad 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 2 \cdot 10$

3) $(5, 5, 4, 4, 3, 1, 0)$ $\quad 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 0 = 2 \cdot 11$

2.7 non

2.10 1) 3^{e} graphe 2) 2^{e} graphe 3) 3^{e} graphe

2.11
$$\begin{aligned} a &\longmapsto r \\ b &\longmapsto t \\ c &\longmapsto u \\ d &\longmapsto s \end{aligned}$$

2.12
$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto A \\ 2 &\longmapsto B \\ 3 &\longmapsto C \\ 4 &\longmapsto D \\ 5 &\longmapsto E \\ 6 &\longmapsto F \end{aligned}$$

2.15 Les premier et troisième graphes sont identiques ; le deuxième graphe n'est pas isomorphe aux autres.