4 Graphes eulériens

Problème de l'explorateur

Un explorateur souhaite explorer toutes les routes entre un certain nombre de villes. Peut-on trouver un itinéraire qui passe par chaque route une seule fois ?

Ce problème se traduit aisément dans le langage des graphes : peut-on trouver un chemin passant une et une seule fois par chaque arête d'un graphe ?

Étant donné que cette question est étroitement liée au problème des ponts de Könisberg et que Euler y est historiquement associé, on pose les définitions suivantes.

Un chemin d'un graphe G est appelé **chemin eulérien** s'il passe une et une seule fois par chaque arête du graphe.

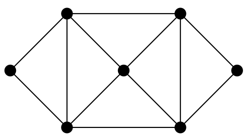
Un graphe G est un **graphe eulérien** s'il admet un chemin eulérien fermé.

Un graphe G est **semi-eulérien** s'il n'est pas eulérien et s'il admet un chemin eulérien ouvert.

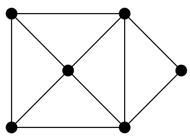
Remarque Un graphe eulérien ou semi-eulérien est nécessairement connexe.

Exemples Les trois graphes ci-dessous sont respectivement eulérien, semi-eulérien et non eulérien.

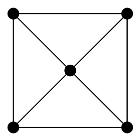
1)



2)



3)



Théorème *Un graphe est eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*

Preuve Supposons qu'un graphe G soit eulérien. Il existe alors un chemin fermé c parcourant une et une seule fois chaque arête.

Le graphe G est donc connexe, puisque c relie tous les sommets entre eux.

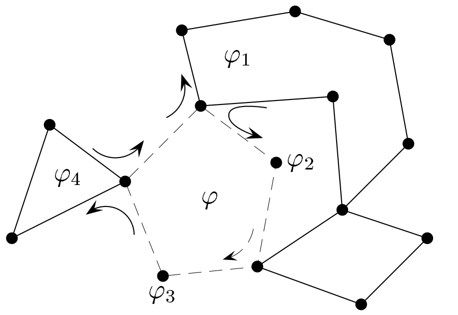
Considérons un sommet x. Lors du parcours du cycle, à chaque fois que nous passons par lui, nous y arrivons et nous en repartons par 2 arêtes non encore parcourues. Le sommet x est donc de degré pair.

Réciproquement, considérons un graphe G connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Nous allons montrer par récurrence sur le nombre d'arêtes que G est alors eulérien.

Si G se réduit à un unique sommet isolé, il est évidemment eulérien.

Sinon tous les sommets de G sont de degré $\geqslant 2$. La proposition de la page 3.3 implique qu'il existe un cycle φ sur G.

Considérons le graphe partiel H constitué des arêtes en dehors du cycle φ. Les sommets de H sont également de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet. Par hypothèse de récurrence, chaque composante connexe H_i de H est un graphe eulérien et admet donc un chemin eulérien fermé φ_i.



Le cycle φ, représenté en trait tillé, définit 4 composantes connexes pour le graphe H, dont 2 sommets isolés pour lesquels leur cycle eulérien est sans arête.
Les flèches symbolisent l'opération de fusion des 2 cycles non vides avec φ.

Pour reconstruire un chemin eulérien fermé sur G, il nous suffit de fusionner le cycle φ avec les différents cycles φ_i. Pour cela, on parcourt le cycle φ depuis un sommet arbitraire ; lorsque l'on rencontre pour la première fois un sommet appartenant à H_i, on lui substitue le chemin eulérien fermé φ_i. Le chemin obtenu est un chemin eulérien fermé pour G, le cycle φ et les chemins φ_i formant une partition des arêtes.

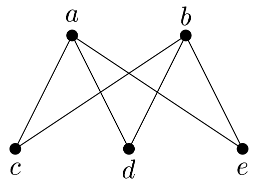
Corollaire *Un graphe est semi-eulérien si et seulement si il est connexe et s'il a exactement deux sommets de degré impair.*

Dans ce cas, le chemin eulérien ouvert joint ces deux sommets.

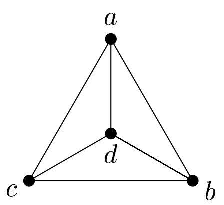
4.1 Justifier que les graphes des exemples de la page précédente sont respectivement eulérien, semi-eulérien et non eulérien.

4.2 Parmi les graphes suivants, déterminer ceux qui sont eulériens ou semi-eulériens et préciser un chemin correspondant.

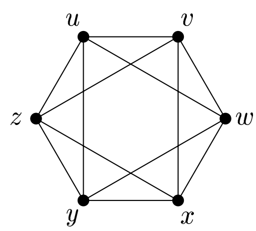
1)



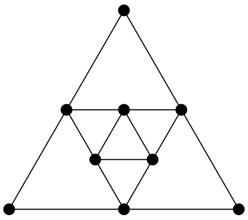
2)

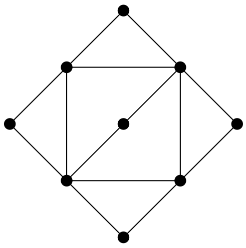


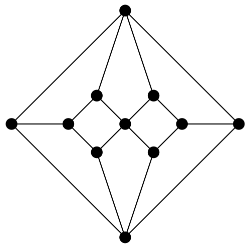
3)



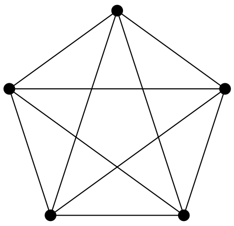
4.3 Déterminer si les graphes suivants sont eulériens, semi-eulériens ou ni l'un ni l'autre.

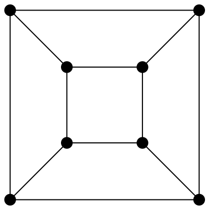
1) 

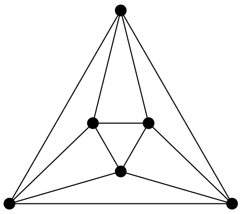
2) 

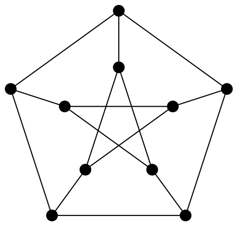
3) 

4.4 Déterminer si les graphes suivants sont eulériens, semi-eulériens ou ni l'un ni l'autre.

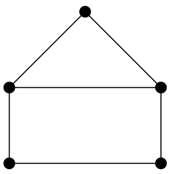
1) 

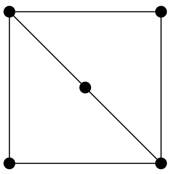
2) 

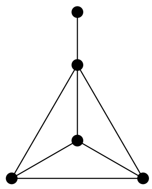
3) 

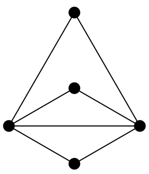
4) 

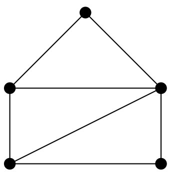
4.5 Déterminer si les graphes suivants sont eulériens, semi-eulériens ou ni l'un ni l'autre.

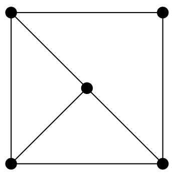
1) 

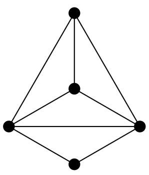
2) 

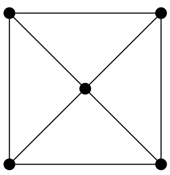
3) 

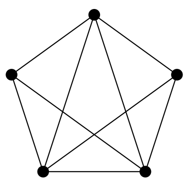
4) 

5) 

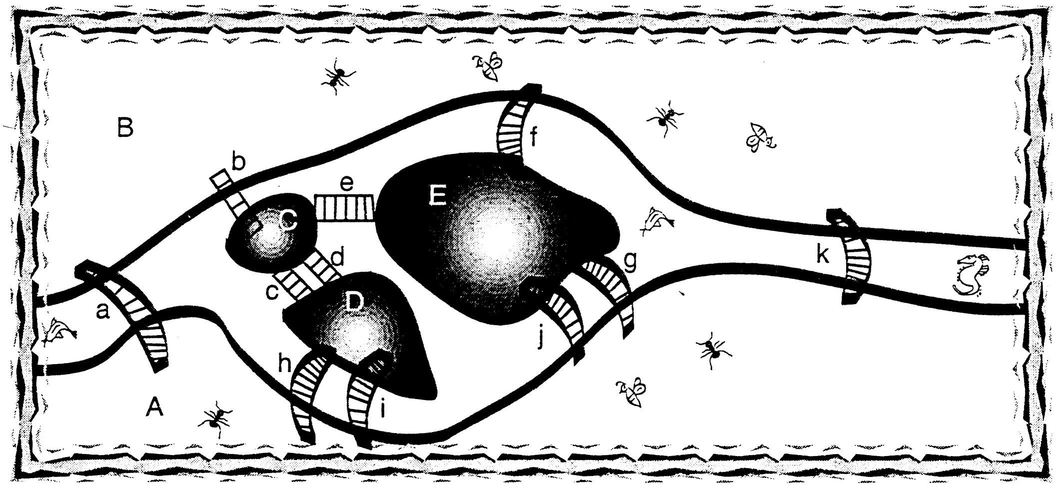
6) 

7) 

8) 

9) 

4.6 On représente ci-dessous la ville de Dreamtown avec sa rivière et ses trois îles.



Est-il possible de parcourir chaque pont une fois et une seule fois lors d'une balade dans cette ville ?

Algorithme de Fleury

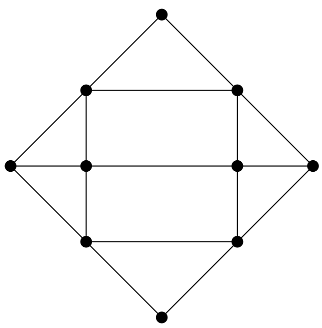
Il existe un algorithme pour déterminer les chemins eulériens dans un graphe eulérien. L'idée est de parcourir le graphe en supprimant toutes les arêtes traversées, mais en évitant autant que possible de rendre le graphe non connexe.

Une arête $a\,b$ d'un graphe G est appelée un **pont** si $a\,b$ est l'unique chemin entre les sommets a et b.

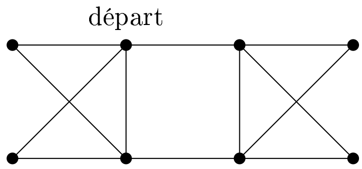
Dans un graphe eulérien, l'**algorithme de Fleury** permet toujours d'obtenir un chemin eulérien fermé :

- Commencer à partir de n'importe quel sommet et parcourir les arêtes arbitrairement en respectant les règles suivantes :
- Supprimer les arêtes parcourues ; au cas où apparaît un sommet isolé, supprimer ce sommet.
- À chaque étape, n'utiliser un pont que s'il n'y a pas d'autre alternative.

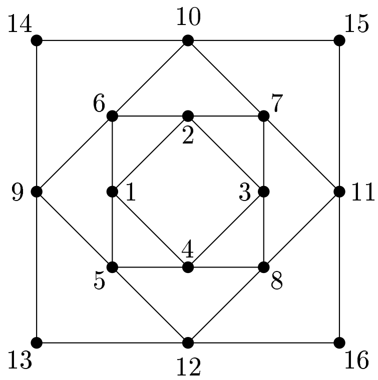
4.7 Utiliser l'algorithme de Fleury pour trouver un chemin eulérien ouvert dans le graphe suivant :



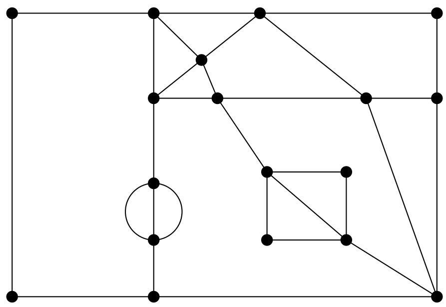
4.8 Utiliser l'algorithme de Fleury pour trouver au moins un chemin eulérien fermé dans le graphe suivant :



4.9 Utiliser l'algorithme de Fleury pour trouver au moins un chemin eulérien fermé dans le graphe suivant :



4.10 Vous êtes un agent de police et la carte des routes de votre secteur est représentée ci-dessous.



Est-il possible de patrouiller sur chacune de ces routes sans parcourir aucune d'elles plus d'une fois ?

Réponses

4.2 1) semi-eulérien $a\,c\,b\,d\,a\,e\,b$

2) ni eulérien, ni semi-eulérien

3) eulérien $u\,v\,z\,u\,y\,z\,x\,y\,w\,x\,v\,w\,u$

4.3 1) eulérien 2) semi-eulérien 3) ni eulérien, ni semi-eulérien

4.4 1) eulérien 2) ni eulérien, ni semi-eulérien

3) eulérien 4) ni eulérien, ni semi-eulérien

4.5 1) semi-eulérien 2) semi-eulérien

3) ni eulérien, ni semi-eulérien 4) eulérien

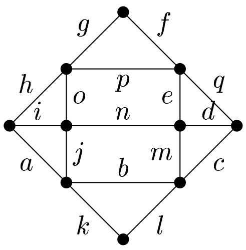
5) semi-eulérien 6) ni eulérien, ni semi-eulérien

7) semi-eulérien 8) ni eulérien, ni semi-eulérien

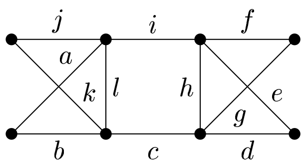
9) semi-eulérien

4.6 oui

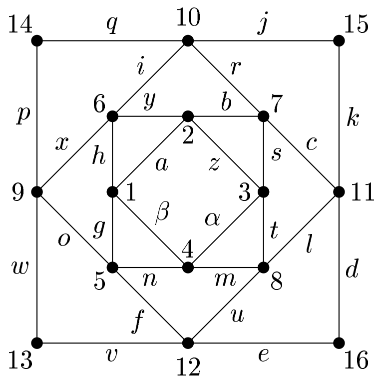
4.7



4.8



4.9



4.10 Oui, mais sans revenir au point de départ : graphe semi-eulérien