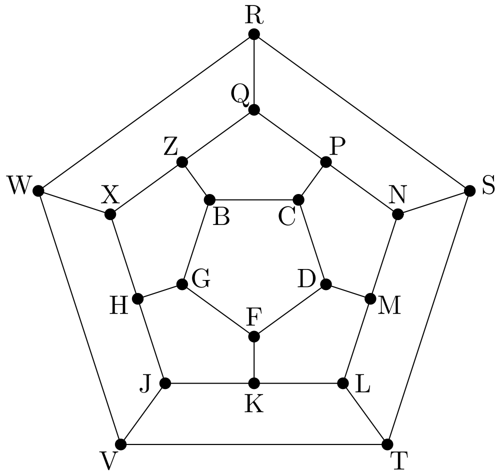
5 Graphes hamiltoniens

Problème du voyageur

Au chapitre précédent, nous avons examiné et résolu le problème de l'existence d'un chemin passant une et une seule fois par chacune des arêtes d'un graphe donné. Nous allons analyser le problème correspondant pour les sommets : dans un graphe donné, existe-t-il un chemin qui passe une et une seule fois par chacun de ses sommets ?

Nous retrouvons là la forme élémentaire du problème du voyageur de commerce. De manière surprenante, ce problème s'avère beaucoup plus difficile que celui de l'explorateur.

Vers 1850, le mathématicien William Hamilton (1805-1865) a tenté de populariser, malheureusement sans succès commercial, un casse-tête qu'il a appelé « the icosian game ». L'idée de ce jeu est illustrée dans le graphe ci-dessous.



Le graphe modélise l'itinéraire d'un voyage autour de la Terre où 20 villes doivent être visitées. Partant de l'une des vingt villes, le voyageur doit y revenir en ayant visité chaque ville une seule fois. Plus précisément, le jeu consiste à imposer les cinq premières villes à visiter et à demander au joueur de compléter l'itinéraire. Par exemple, si l'on commence par les villes BCPNM, on peut remarquer qu'il y a exactement deux voyages réalisant les conditions imposées :

BCPNM DFKLTS RQZXW VJHGB
BCPNM DFGHX WVJKLT SRQZB

Un **cycle hamiltonien** d'un graphe G est un cycle qui contient chaque sommet de G.

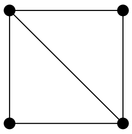
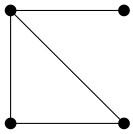
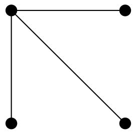
Un graphe est **hamiltonien** s'il contient un cycle hamiltonien.

Un **chemin hamiltonien** est un chemin simple ouvert qui contient chaque sommet de G.

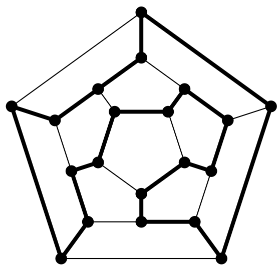
Un graphe non hamiltonien est **semi-hamiltonien** s'il contient un chemin hamiltonien.

Remarque Ajouter ou enlever des boucles ou des arêtes multiples ne modifie pas le caractère hamiltonien d'un graphe, puisque l'on peut les ignorer en cherchant un chemin qui visite chaque sommet.

Exemples Les trois graphes ci-dessous sont respectivement hamiltonien, semi-hamiltonien et non hamiltonien.

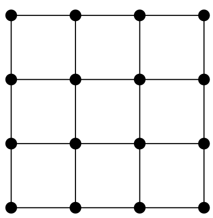
1)  2)  3) 

Le graphe ci-dessous est hamiltonien ; on le voit en considérant, par exemple, le cycle hamiltonien dessiné en gras :



5.1 Trouver un autre circuit hamiltonien dans le « icosian game ».

5.2 Montrer que le graphe ci-dessous est hamiltonien en exhibant un cycle hamiltonien.



À première vue, le problème de savoir si un graphe est hamiltonien semble très proche de celui de savoir si un graphe est eulérien. On pourrait espérer résoudre ce problème d'une manière aussi satisfaisante que pour les graphes eulériens. Dans le chapitre précédent, nous avons formulé un critère pour l'existence d'un chemin eulérien — le degré de chaque sommet doit être pair — et nous avons même proposé, lorsque cette condition est vérifiée, un algorithme permettant de construire le chemin cherché.

Malheureusement, la solution du problème correspondant pour un cycle hamiltonien est beaucoup plus difficile. En fait, dans le cas d'un graphe quelconque, il n'y a toujours pas de critères, c'est-à-dire de conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence d'un cycle ou d'un chemin hamiltonien. Cela reste l'un des problèmes majeurs non résolus de la théorie des graphes.

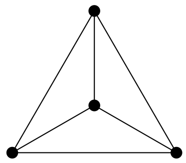
Cependant, nous possédons des résultats partiels de deux types. Les uns donnent des conditions nécessaires, c'est-à-dire des conditions que tout graphe doit satisfaire pour être hamiltonien ; les autres constituent des conditions suffisantes, c'est-à-dire des conditions qui assurent qu'un graphe est hamiltonien.

Conditions suffisantes pour qu'un graphe soit hamiltonien

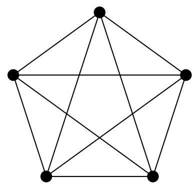
Un graphe est **complet** lorsque deux sommets quelconques sont reliés par exactement une arête. Le graphe complet d'ordre n se note K_n.

Exemples

K_4



K_5



Trouver un cycle hamiltonien dans un graphe complet K_n $(n \geqslant 2)$ est très simple. On peut procéder à partir de n'importe quel sommet. Comme toutes les arêtes possibles sont présentes, on peut toujours passer de n'importe quel sommet à n'importe quel autre directement. La construction se fait de proche en proche.

5.3 1) Quel est le nombre d'arêtes du graphe K_n ?

2) Combien de cycles hamiltoniens distincts y a-t-il dans K_n ?

La plupart des théorèmes qui expriment une condition suffisante pour qu'un graphe G soit hamiltonien sont de la forme : si G a « assez » d'arêtes, alors G est hamiltonien.

Théorème d'Ore (1960)

Soit G *un graphe simple avec* $n \geqslant 3$ *sommets. Si* $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$ *pour toute paire de sommets* u *et* v *non voisins, alors* G *est hamiltonien.*

Preuve Par l'absurde, supposons le théorème faux.

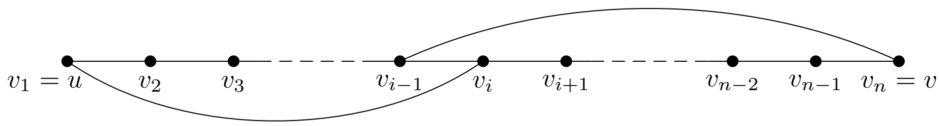
Il existe donc un graphe non hamiltonien de n sommets satisfaisant la condition d'Ore : $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$ pour toute paire de sommets u et v non voisins.

En ajoutant des arêtes supplémentaires — ce qui ne perturbe pas l'inégalité d'Ore — on peut trouver un nouveau graphe $G^\star$ qui soit « à peine » non hamiltonien dans le sens suivant : l'adjonction d'une nouvelle arête le rendrait hamiltonien. Quitte à renuméroter les sommets de $G^\star$, il s'ensuit que $G^\star$ possède un chemin $u = v_1 \ldots v_n = v$ passant par chaque sommet.

Puisque $G^\star$ est non hamiltonien, les sommets u et v ne sont pas voisins et satisfont la condition d'Ore : $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$.

Désignons par $N(u)$ l'ensemble de tous les sommets voisins de u et par $N(v)$ l'ensemble de tous les sommets voisins de v.

Si $v_i \in N(u)$, alors $v_{i-1} \notin N(v)$.
En effet, si ce n'était pas le cas, $v_1\, v_2\, \ldots\, v_{i-1}\, v_n\, v_{n-1}\, v_{n-2}\, \ldots\, v_{i+1}\, v_i\, v_1$ serait un cycle hamiltonien dans $G^\star$, comme l'illustre la figure ci-dessous.



Ainsi, pour chaque sommet voisin de u, il existe un sommet de $V - \{v\}$ non voisin de v. Mais alors, $\deg(v) \leqslant (n-1) - \deg(u)$ dans $G^\star$: en effet, parmi les $n-1$ sommets de G distincts de v, au moins $\deg(u)$ d'entre eux ne sont pas voisins de v.

Il en résulte $\deg(u) + \deg(v) \leqslant n - 1$, ce qui vient contredire l'inégalité d'Ore.

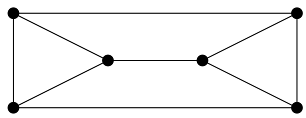
Corollaire : théorème de Dirac (1952)

Soit G *un graphe simple avec* $n \geqslant 3$ *sommets. Si* $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$ *pour chaque sommet, alors* G *est hamiltonien.*

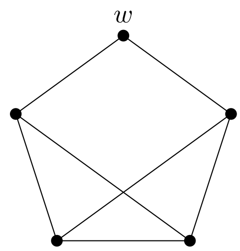
5.4 Démontrer le théorème de Dirac à partir du théorème d'Ore.

Exemples

1) Pour le graphe ci-contre, on a $n = 6$ et $\deg(v) = 3$ pour chaque sommet v. Le théorème de Dirac s'applique donc et le graphe est hamiltonien.



2) Dans le graphe ci-contre, on a $n = 5$ et $\deg(w) = 2$. Le théorème de Dirac ne s'applique donc pas.
Par contre, on a $\deg(u) + \deg(v) \geqslant 5$ pour toute paire de sommets non voisins. Le théorème d'Ore s'applique, de sorte que le graphe est hamiltonien.
Cet exemple montre la plus grande généralité de la condition d'Ore.



Conditions nécessaires pour qu'un graphe soit hamiltonien

Commençons par énoncer les règles fondées sur le fait que tout cycle hamiltonien doit contenir exactement deux arêtes par sommet.

Proposition *Pour qu'un graphe* G *soit hamiltonien, il faut que les règles ci-dessous soient vérifiées.*

Règle 1 *Pour tout sommet v de* G*, on doit avoir* $\deg(v) \geqslant 2$.

Règle 2 *Si un sommet v est de degré* 2*, les deux arêtes passant par v doivent être incluses dans tout cycle hamiltonien.*

Règle 3 *Un cycle hamiltonien ne peut pas contenir de sous-cycle ; autrement dit, au cours de la construction d'un cycle hamiltonien, aucun cycle ne peut être formé avant que tous les sommets aient été visités.*

Règle 4 *Si, au cours de la construction d'un cycle hamiltonien, deux arêtes passant par un sommet v s'imposent, toutes les autres arêtes passant par ce sommet devront être supprimées.*

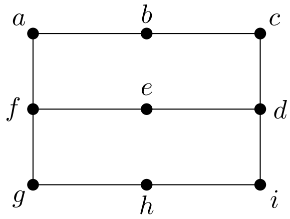
5.5 1) Montrer qu'un cycle hamiltonien est toujours de longueur n, où $n = |\mathrm{V}| =$ nombre de sommets.

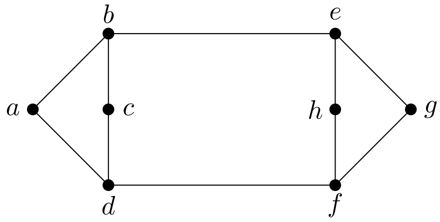
Indication : utiliser le lemme des poignées de mains.

2) Justifier la règle 3 : un cycle hamiltonien ne peut pas contenir de sous-cycle.

Indication : utiliser le résultat de l'exercice 3.5.

5.6 Expliquer pourquoi les graphes suivants ne sont pas hamiltoniens.

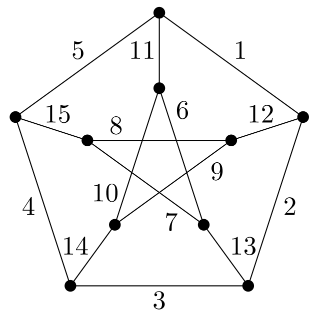
1) 

2) 

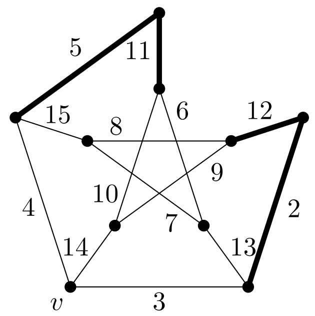
Ces règles, qui sont des conditions nécessaires à l'existence d'un cycle hamiltonien, sont surtout employées quand il s'agit de montrer qu'un graphe n'est pas hamiltonien. La stratégie consiste à essayer de construire un cycle hamiltonien et de montrer qu'à une certaine étape, il est impossible d'aller plus loin.

Exemple Montrons que le graphe de Petersen n'est pas hamiltonien.

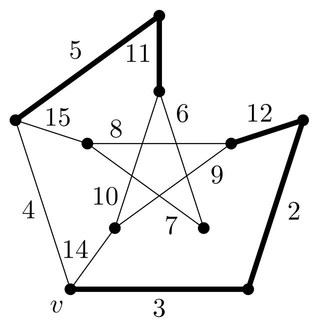
Pour la commodité de la démonstration, on numérote les arêtes plutôt que les sommets.
La stratégie consiste à essayer de construire un cycle hamiltonien en exploitant la symétrie du graphe pour éliminer certaines arêtes. La construction en plusieurs étapes conduira à une contradiction.
Supposons par l'absurde que le graphe soit hamiltonien. À cause de la règle 3, on ne peut pas prendre toutes les arêtes de 1 à 5.



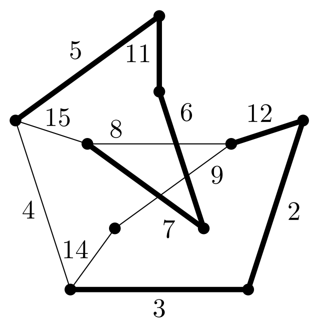
Pour des raisons de symétrie, le choix de celle qui est supprimée est sans importance. Supposons que ce soit l'arête 1. Les arêtes 5 et 11, de même que les arêtes 2 et 12, doivent faire partie du cycle hamiltonien, en vertu de la règle 2.



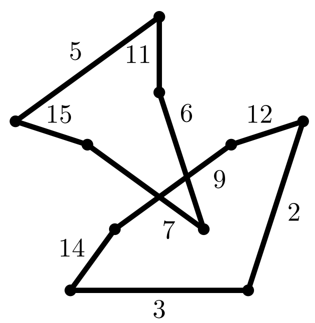
Une des arêtes 3 ou 4 au moins (voire les deux) doit être incluse, sinon le sommet v serait de degré 1, enfreignant la règle 1. Par symétrie, choisissons l'arête 3.
La règle 4 stipule alors que l'on peut supprimer l'arête 13.



Les arêtes 6 et 7 doivent être incluses (règle 2) et l'arête 10 exclue (règle 4).



Les arêtes 9 et 14 doivent être incluses (règle 2) et les arêtes 4 et 8 exclues (règle 4).
Enfin, l'arête 15 doit être comprise (règle 2).
Notre construction d'un cycle hamiltonien débouche finalement en deux sous-cycles, ce qui contredit la règle 3. C'est pourquoi le graphe de Petersen n'est pas hamiltonien.

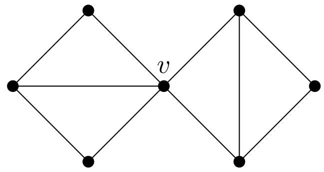


Soit v un sommet d'un graphe G. Considérons le sous-graphe G′ de G obtenu en supprimant le sommet v ainsi que toutes les arêtes de G passant par v.

Un sommet v est appelé un **point d'articulation** si sa suppression « déconnecte » le graphe.

Remarquons qu'il s'agit d'une opération analogue à celle de l'algorithme de Fleury. De la même manière, on s'intéresse aux sommets qui, lorsqu'on les supprime, rendent le graphe G′ non connexe.

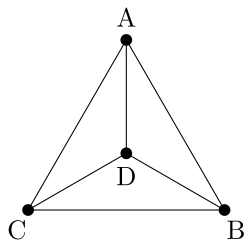
Exemple Dans le graphe ci-dessous, v est un point d'articulation.

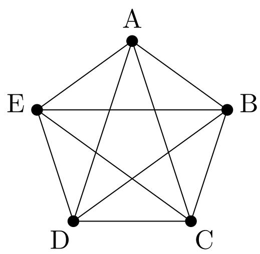


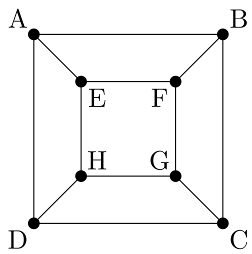
Théorème *Un graphe hamiltonien n'admet aucun point d'articulation.*

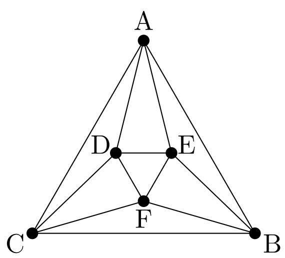
Preuve La suppression d'un sommet au cycle hamiltonien laisse tous les autres sommets sur une même chaîne conservant la connexité de G.

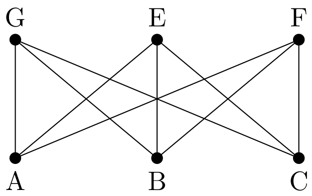
5.7 Parmi les graphes suivants, déterminer ceux qui sont hamiltoniens et trouver, le cas échéant, un cycle hamiltonien.

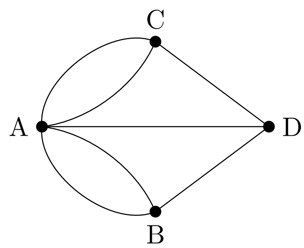
1)


2)


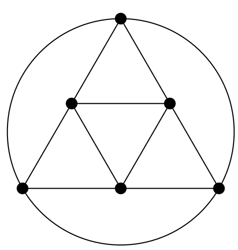
3)


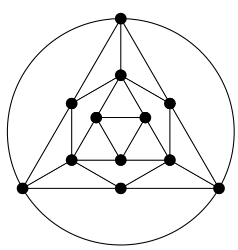
4)


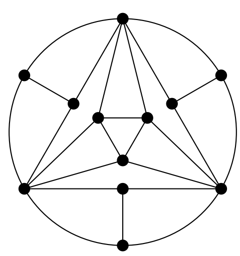
5)


6)


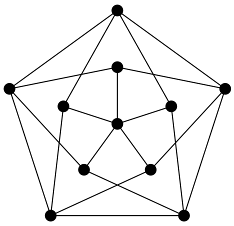
5.8 Déterminer les graphes hamiltoniens :

1)


2)


3)


5.9 Montrer que le graphe de Grötzsch est hamiltonien.

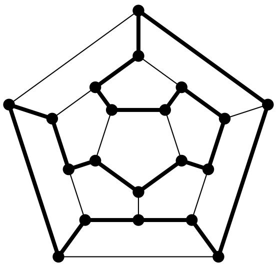


5.10 Donner un exemple comportant au moins six sommets de chacun des graphes suivants :

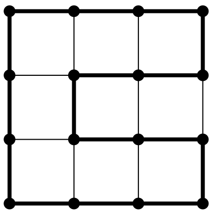
1) un graphe hamiltonien qui n'est pas eulérien ;
2) un graphe eulérien qui n'est pas hamiltonien.

Réponses

5.1



5.2



5.3 1) $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ 2) $\dfrac{(n-1)!}{2}$

5.7

1) hamiltonien : A B C D A
2) hamiltonien : A B C D E A
3) hamiltonien : A E F B C G H D A
4) hamiltonien : A B C D F E A
5) hamiltonien : A E C F B G A
6) hamiltonien : A B D C A