5.3 1) Dans le graphe complet K_n, chaque sommet est relié aux $n - 1$ autres sommets : chaque sommet est donc de degré $n - 1$.

En appliquant le lemme des poignées de mains, on obtient :
$$2\,|E| = \sum_{x \in V} \deg(x) = \underbrace{(n-1) + (n-1) + \ldots + (n-1)}_{n \text{ fois}} = n\,(n-1)$$

On en déduit immédiatement le nombre d'arêtes : $|E| = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

2) Choisissons arbitrairement un sommet.
On peut se rendre vers n'importe quel autre des $n - 1$ sommets restants : il y a $n - 1$ possibilités.
Il reste ensuite $n-2$ sommets à visiter : il y a donc encore $n-2$ possibilités.
Il faut alors choisir parmi les $n - 3$ sommets auxquels on doit encore se rendre.
On poursuit de même, jusqu'à ce que l'on ait parcouru tous les sommets.
Au cours de ce processus, voici le nombre de possibilités :
$(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$

Cependant, on obtient ici le double du nombre total de cycles hamiltoniens possibles, car on compte deux fois chaque cycle : dans le sens aller et le sens retour.
En définitive, il y a $\dfrac{(n-1)!}{2}$ cycles hamiltoniens.