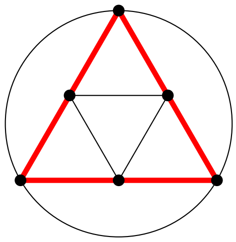
5.8 1) Le graphe possède 6 sommets, tous de degré 4.

Il vérifie les conditions du théorème de Dirac ($4 \geqslant \frac{6}{2}$) : il est hamiltonien.

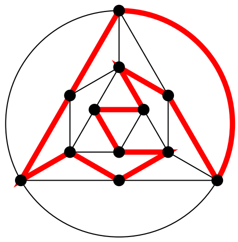
On exhibe aussi facilement un cycle hamiltonien :



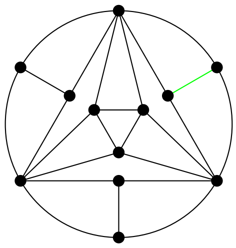
2) Le graphe possède 12 sommets, les uns de degré 5, les autres de degré 4.

Les conditions du théorème de Dirac ne sont pas vérifiées ($5 \ngeqslant \frac{12}{2}$), ni celles du théorème d'Ore ($5 + 5 \ngeqslant 12$).

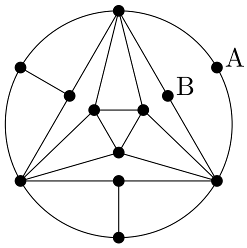
Il ne reste donc qu'à exhiber un cycle hamiltonien pour prouver que le graphe est hamiltonien :



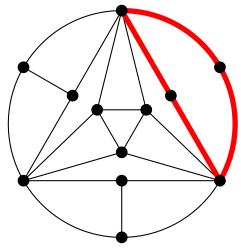
3) L'arête mise en évidence en vert doit faire partie du cycle hamiltonien.



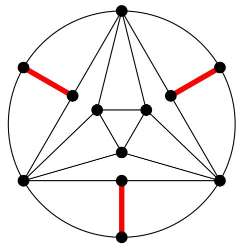
En effet, si elle n'en fait pas partie, alors les sommets A et B sont de degré 2, de sorte que les arêtes qui en sont issues doivent faire partie du cycle hamiltonien.



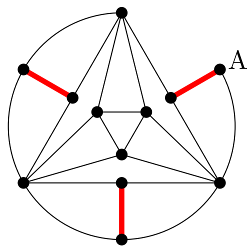
Mais on obtient alors un sous-cycle, ce qui contredit la règle 3.



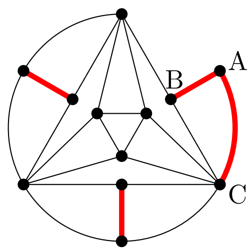
Le même raisonnement nous permet de garantir que les trois arêtes mises en évidence en rouge doivent faire partie du cycle hamiltonien :



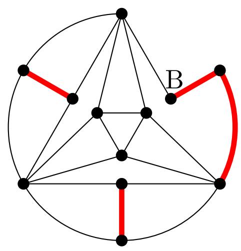
Les six arêtes qui constituent le grand cercle extérieur ne peuvent pas toutes faire partie du cycle hamiltonien, sous peine de former un sous-cycle. Supprimons l'une d'elles, peu importe laquelle vu la symétrie du graphe.



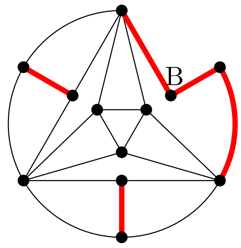
Puisque le sommet A est de degré 2, les deux arêtes qui y passent doivent nécessairement faire partie du cycle hamiltonien.



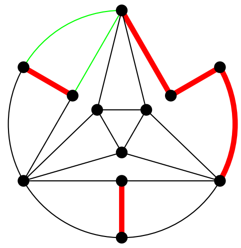
L'arête BC doit être supprimée, pour ne pas former un sous-cycle.



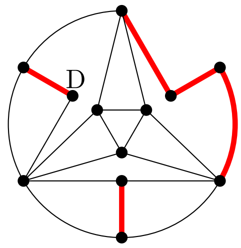
Le sommet B étant de degré 2, les arêtes qui y passent doivent faire partie du cycle hamiltonien.



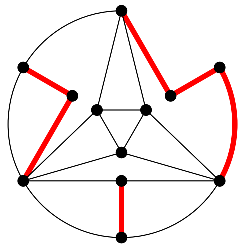
Les deux arêtes mises en évidence en vert ne peuvent pas toutes deux faire partie du cycle hamiltonien, sinon un sous-cycle en résulterait.



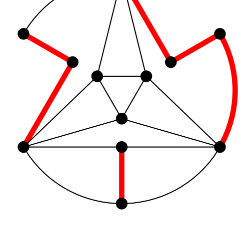
Il faut donc supprimer l'une d'elles, peu importe laquelle pour des raisons de symétrie.



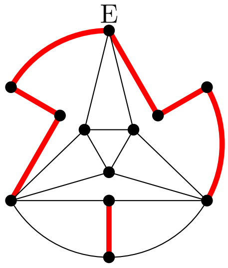
Comme le sommet D est de degré 2, ses arêtes font obligatoirement partie du cycle hamiltonien.



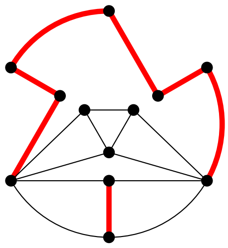
Pour éviter de former un sous-cycle, il faut supprimer encore une arête.



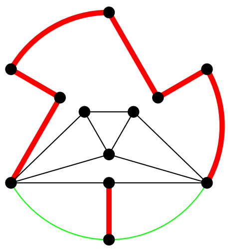
Il en résulte un sommet de degré 2, dont les arêtes font partie du cycle hamiltonien.



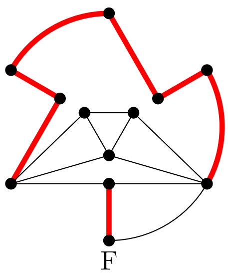
Toutes les autres arêtes du sommet E doivent être supprimées.



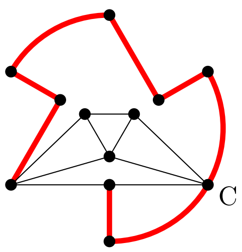
Les arêtes mises en évidence en vert ne peuvent pas toutes deux faire partie du cycle hamiltonien, sinon on aurait un sous-cycle.



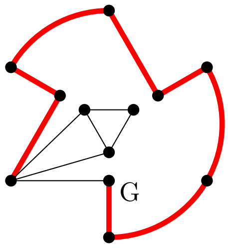
Il faut donc supprimer l'une d'elles, peu importe laquelle pour des raisons de symétrie.



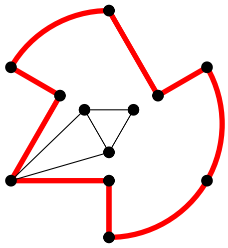
Comme le sommet F est de degré 2, on doit inclure ses arêtes dans le cycle hamiltonien.



Toutes les autres arêtes du sommet C doivent être supprimées.



Vu que le sommet G est de degré 2, on doit inclure ses arêtes.



Il en résulte un sous-cycle qui vient contredire la règle 3 : en conclusion, le graphe n'est pas hamiltonien.