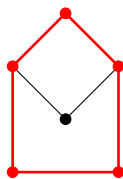
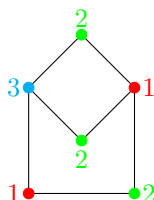


6.5

- 1) Comme le graphe contient le sous-graphe cyclique à 5 sommets, au moins trois couleurs sont nécessaires ($\chi(G) \geq 3$) :

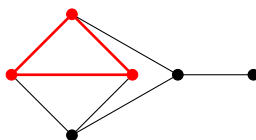


En outre, trois couleurs suffisent ($\chi(G) \leq 3$) :

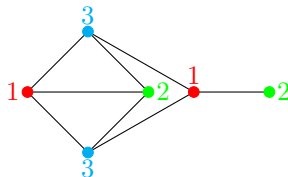


Donc $\chi(G) = 3$.

- 2) Vu que le graphe contient le sous-graphe complet à 3 sommets, il faut au minimum trois couleurs ($\chi(G) \geq 3$) :

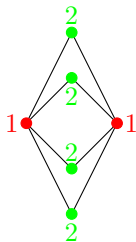


En revanche, trois couleurs suffisent ($\chi(G) \leq 3$) :

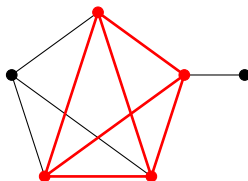


On conclut que $\chi(G) = 3$.

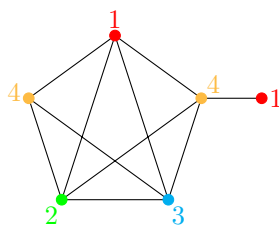
- 3) Deux couleurs sont nécessaires et suffisent ($\chi(G) = 2$) :



- 4) Attendu que le graphe contient le sous-graphe complet à 4 sommets, au moins 4 couleurs sont nécessaires ($\chi(G) \geq 4$) :

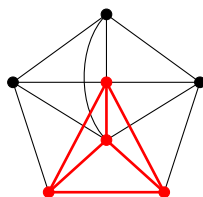


De plus, quatre couleurs suffisent ($\chi(G) \leq 4$) :

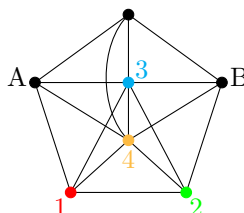


Par conséquent $\chi(G) = 4$.

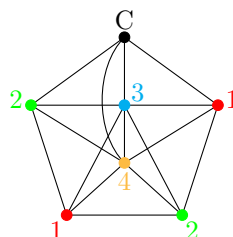
5) Le graphe contient un sous-graphe complet à 4 sommets :



Ce sous-graphe complet exige 4 couleurs :



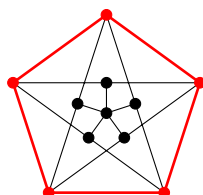
Si l'on tente de poursuivre le coloriage avec seulement 4 couleurs, le sommet A ayant des voisins de couleurs 1, 3 et 4 doit être de couleur 2 ; quant au sommet B, il doit être de couleur 1, car il possède des voisins de couleurs 2, 3 et 4.



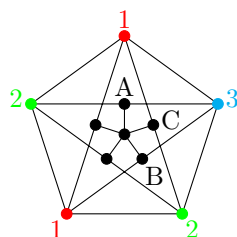
Comme le sommet C a des voisins de couleurs 1, 2, 3 et 4, on est finalement contraint de recourir à une cinquième couleur.

En définitive $\chi(G) = 5$.

6) Le graphe contient un sous-graphe cyclique à 5 sommets :



Ce sous-graphe cyclique requiert au minimum 3 couleurs :

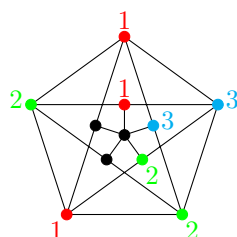


Essayons de poursuivre le coloriage avec seulement 3 couleurs.

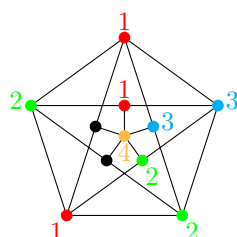
Le sommet A a des voisins de couleurs 2 et 3 : il doit être de couleur 1.

Le sommet B a des voisins de couleurs 1 et 3 : il doit être de couleur 2.

Le sommet C a des voisins de couleurs 1 et 2 : il doit être de couleur 3.



Comme le sommet au centre de la figure a des voisins de 3 couleurs différentes, une quatrième couleur s'avère nécessaire :



Finalement, quatre couleurs suffisent ($\chi(G) = 4$) :

