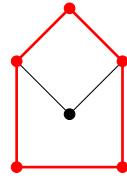
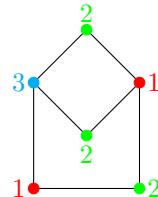


- 6.5** 1) Comme le graphe contient le sous-graphe cyclique à 5 sommets, au moins trois couleurs sont nécessaires ( $\chi(G) \geq 3$ ) :

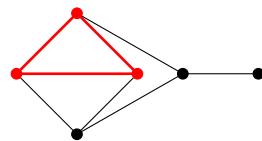


En outre, trois couleurs suffisent ( $\chi(G) \leq 3$ ) :

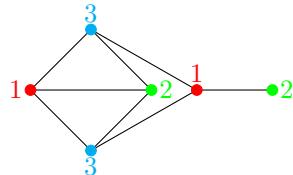


Donc  $\chi(G) = 3$ .

- 2) Vu que le graphe contient le sous-graphe complet à 3 sommets, il faut au minimum trois couleurs ( $\chi(G) \geq 3$ ) :

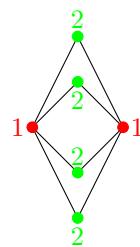


En revanche, trois couleurs suffisent ( $\chi(G) \leq 3$ ) :

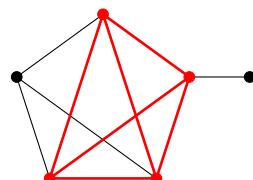


On conclut que  $\chi(G) = 3$ .

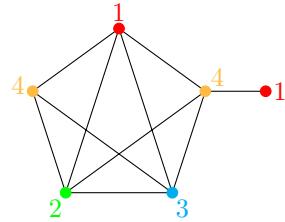
- 3) Deux couleurs sont nécessaires et suffisent ( $\chi(G) = 2$ ) :



- 4) Attendu que le graphe contient le sous-graphe complet à 4 sommets, au moins 4 couleurs sont nécessaires ( $\chi(G) \geq 4$ ) :

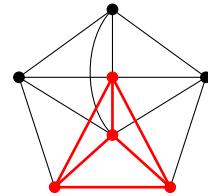


De plus, quatre couleurs suffisent ( $\chi(G) \leq 4$ ) :

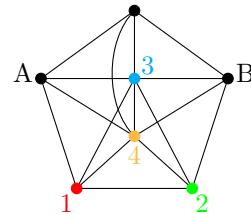


Par conséquent  $\chi(G) = 4$ .

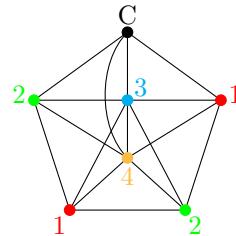
- 5) Le graphe contient un sous-graphe complet à 4 sommets :



Ce sous-graphe complet exige 4 couleurs :



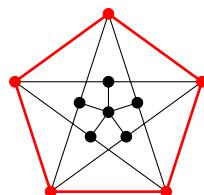
Si l'on tente de poursuivre le coloriage avec seulement 4 couleurs, le sommet A ayant des voisins de couleurs 1, 3 et 4 doit être de couleur 2; quant au sommet B, il doit être de couleur 1, car il possède des voisins de couleurs 2, 3 et 4.



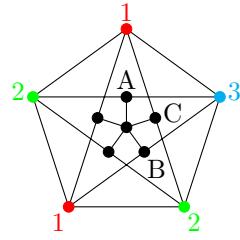
Comme le sommet C a des voisins de couleurs 1, 2, 3 et 4, on est finalement contraint de recourir à une cinquième couleur.

En définitive  $\chi(G) = 5$ .

- 6) Le graphe contient un sous-graphe cyclique à 5 sommets :



Ce sous-graphe cyclique requiert au minimum 3 couleurs :

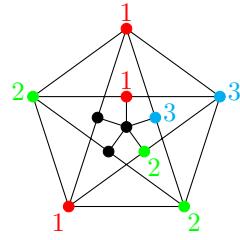


Essayons de poursuivre le coloriage avec seulement 3 couleurs.

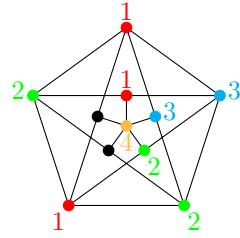
Le sommet A a des voisins de couleurs 2 et 3 : il doit être de couleur 1.

Le sommet B a des voisins de couleurs 1 et 3 : il doit être de couleur 2.

Le sommet C a des voisins de couleurs 1 et 2 : il doit être de couleur 3.



Comme le sommet au centre de la figure a des voisins de 3 couleurs différentes, une quatrième couleur s'avère nécessaire :



Finalement, quatre couleurs suffisent ( $\chi(G) = 4$ ) :

