2.4 1) Soit $z = x + y\,i$ une racine carrée de $15 - 8\,i$. On doit avoir :

$15 - 8\,i = z^2 = (x + y\,i)^2 = x^2 + 2\,x\,y\,i + y^2\,i^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$

Par conséquent, il faut résoudre le système $\begin{cases} 15 = x^2 - y^2 \\ -8 = 2\,x\,y \end{cases}$

La seconde équation implique $y = -\frac{4}{x}$ que l'on substitue dans la première équation :

$15 = x^2 - \left(-\frac{4}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{16}{x^2}$

On en tire $0 = x^2 - 15 - \frac{16}{x^2}$ et en multipliant par x^2 :

$0 = x^4 - 15\,x^2 - 16 = (x^2 + 1)\,(x^2 - 16) = (x^2 + 1)\,(x + 4)\,(x - 4)$

Vu que $x \in \mathbb{R}$, il n'y a que deux solutions possibles : $x = -4$ ou $x = 4$.

(a) Si $x = -4$, alors $y = -\frac{4}{-4} = 1$, d'où la première racine carrée $-4 + i$.

(b) Si $x = 4$, alors $y = -\frac{4}{4} = -1$, d'où la seconde racine carrée $4 - i$.

2) Soit $z = x + y\,i$ une racine carrée de $-8 - 6\,i$. On doit avoir :

$-8 - 6\,i = z^2 = (x + y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$

C'est pourquoi, il faut résoudre le système $\begin{cases} -8 = x^2 - y^2 \\ -6 = 2\,x\,y \end{cases}$

La seconde équation fournit $y = -\frac{3}{x}$ que l'on remplace dans la première équation :

$-8 = x^2 - \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{9}{x^2}$

On en déduit $0 = x^2 + 8 - \frac{9}{x^2}$ et par multiplication par x^2 :

$0 = x^4 + 8\,x^2 - 9 = (x^2 - 1)\,(x^2 + 9) = (x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 9)$

Comme $x \in \mathbb{R}$, les seules solutions possibles sont $x = -1$ ou $x = 1$.

(a) Si $x = -1$, alors $y = -\frac{3}{-1} = 3$ et la première racine carrée est $-1 + 3\,i$.

(b) Si $x = 1$, alors $y = -\frac{3}{1} = -3$ et la seconde racine carrée est $1 - 3\,i$.

3) Soit $z = x + y\,i$ une racine carrée de $24 + 10\,i$. On doit avoir :

$24 + 10\,i = z^2 = (x + y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$

Il s'agit donc de résoudre le système $\begin{cases} 24 = x^2 - y^2 \\ 10 = 2\,x\,y \end{cases}$

La seconde équation implique $y = \frac{5}{x}$ que l'on remplace dans la première équation :

$24 = x^2 - \left(\frac{5}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{25}{x^2}$

On en déduit $0 = x^2 - 24 - \frac{25}{x^2}$ et en multipliant par x^2 :

$0 = x^4 - 24\,x^2 - 25 = (x^2 + 1)\,(x^2 - 25) = (x^2 + 1)\,(x + 5)\,(x - 5)$

Sachant que $x \in \mathbb{R}$, on conclut que $x = -5$ ou $x = 5$.

(a) Si $x=-5$, alors $y=\frac{5}{-5}=-1$ et la première racine carrée est $-5-i$.

(b) Si $x=5$, alors $y=\frac{5}{5}=1$, si bien que la seconde racine carrée est $5+i$.

4) Si $z=x+y\,i$ désigne une racine carrée de $-7+24\,i$, le système suivant doit être vérifié : $\begin{cases} -7=x^2-y^2 \\ 24=2\,x\,y \end{cases}$

La seconde équation délivre $y=\frac{12}{x}$ que l'on substitue dans la première : $-7=x^2-\left(\frac{12}{x}\right)^2=x^2-\frac{144}{x^2}$

On obtient : $0=x^4+7\,x^2-144=(x^2-9)\,(x^2+16)=(x+3)\,(x-3)\,(x^2+16)$

(a) Si $x=-3$, alors $y=\frac{12}{-3}=-4$ et $z=-3-4\,i$.

(b) Si $x=3$, alors $y=\frac{12}{3}=4$ et $z=3+4\,i$.

5) Si $z=x+y\,i$ est une racine carrée de $3+4\,i$, alors on doit avoir $\begin{cases} 3=x^2-y^2 \\ 4=2\,x\,y \end{cases}$

La seconde équation mène à $y=\frac{2}{x}$ que l'on remplace dans la première : $3=x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=x^2-\frac{4}{x^2}$ d'où l'on tire

$0=x^4-3\,x^2-4=(x^2+1)\,(x^2-4)=(x^2+1)\,(x+2)\,(x-2)$

(a) Si $x=-2$, alors $y=\frac{2}{-2}=-1$ et $z=-2-i$.

(b) Si $x=2$, alors $y=\frac{2}{2}=1$ et $z=2+i$.

6) Soit $z=x+y\,i$ une racine carrée de i. Pour déterminer z, il convient de résoudre le système $\begin{cases} 0=x^2-y^2=(x+y)\,(x-y) \\ 1=2\,x\,y \end{cases}$

La première équation implique $y=-x$ ou $y=x$.

(a) Si $y=-x$, alors on doit avoir $1=2\,x\,(-x)=-2\,x^2$. Cette équation est manifestement impossible, car $-2\,x^2\leqslant 0<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(b) Si $y=x$, alors on a $1=2\,x\cdot x=2\,x^2$, d'où l'on tire $x^2=\frac{1}{2}$ et, par suite, $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les racines carrées de i sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$.

7) Si z désigne une racine carrée de i, alors $(i\,z)^2=i^2\,z^2=(-1)\,i=-i$, ce qui signifie que $i\,z$ est une racine carrée de $-i$.

En utilisant les résultats de la question précédente, on obtient donc les racines carrées de $-i$:

$i\,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,i+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$i\,\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i^2=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

8) Étant donné que $-4 = 4\,i^2$, il est évident que ses deux racines carrées ne sont autres que $2\,i$ et $-2\,i$.