2.5 1) $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 = 16\,i^2$ admet les racines carrées évidentes $4\,i$ et $-4\,i$.

$z_1 = \dfrac{-(-4) + 4\,i}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} + \dfrac{4}{2}\,i = 2 + 2\,i$

$z_2 = \dfrac{-(-4) - 4\,i}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} - \dfrac{4}{2}\,i = 2 - 2\,i$

2) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34 = 36 - 136 = -100 = 100\,i^2$ dont les racines carrées manifestes sont $10\,i$ et $-10\,i$.

$z_1 = \dfrac{-(-6) + 10\,i}{2 \cdot 1} = \dfrac{6}{2} + \dfrac{10}{2}\,i = 3 + 5\,i$

$z_2 = \dfrac{-(-6) - 10\,i}{2 \cdot 1} = \dfrac{6}{2} - \dfrac{10}{2}\,i = 3 - 5\,i$

3) L'équation $z^2 = -32 + 24\,i$ revient à chercher les racines carrées de $-32 + 24\,i$.

Posons $z = x + y\,i$. On doit avoir

$z^2 = (x + y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y = -32 + 24\,i$

ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} -32 = x^2 - y^2 \\ 24 = 2\,x\,y \end{cases}$

La seconde équation implique $y = \frac{12}{x}$ que l'on substitue dans la première :

$-32 = x^2 - \left(\frac{12}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{144}{x^2}$

Après multiplication par x^2, il s'agit de résoudre :

$0 = x^4 + 32\,x^2 - 144 = (x^2 - 4)\,(x^2 + 36) = (x + 2)\,(x - 2)\,(x^2 + 36)$

(a) Si $x = -2$, alors $y = \frac{12}{-2} = -6$ et la première solution est $-2 - 6\,i$.

(b) Si $x = 2$, alors $y = \frac{12}{2} = 6$ et la seconde solution est $2 + 6\,i$.

4) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 = 7\,i^2$ admet les racines carrées évidentes $\sqrt{7}\,i$ et $-\sqrt{7}\,i$.

$z_1 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{7}\,i}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}\,i$

$z_1 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{7}\,i}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}\,i$

5) $\Delta = (i - 6)^2 - 4\,(1 + i)\,(2 - 3\,i) = i^2 - 12\,i + 36 - 8 + 12\,i - 8\,i + 12\,i^2 =$
$= 15 - 8\,i$

Vu l'exercice 2.4 1), les racines carrées de $15 - 8\,i$ sont $4 - i$ et $-4 + i$.

$z_1 = \dfrac{-(i - 6) + 4 - i}{2\,(1 + i)} = \dfrac{10 - 2\,i}{2 + 2\,i} = \dfrac{(10 - 2\,i)\,(2 - 2\,i)}{(2 + 2\,i)\,(2 - 2\,i)} = \dfrac{20 - 20\,i - 4\,i + 4\,i^2}{4 - 4\,i + 4\,i - 4\,i^2}$

$= \dfrac{16 - 24\,i}{8} = \dfrac{16}{8} - \dfrac{24}{8}\,i = 2 - 3\,i$

$$z_2 = \frac{-(i-6)-4+i}{2\,(1+i)} = \frac{2}{2+2\,i} = \frac{2\,(2-2\,i)}{(2+2\,i)\,(2-2\,i)} = \frac{4-4\,i}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i$$

6) $\Delta = \Big(3\,(1+i)\Big)^2 - 4\cdot 2\,i\,(3-i) = 9\,(1+2\,i+i^2) - 8\,i\,(3-i) = 18\,i - 24\,i + 8\,i^2 =$
$= -8-6\,i$

D'après l'exercice 2.4 2), les racines carrées de $-8-6\,i$ sont $1-3\,i$ et $-1+3\,i$.

$$z_1 = \frac{-3\,(1+i)+1-3\,i}{2\cdot 2\,i} = \frac{-2-6\,i}{4\,i} = \frac{(-2-6\,i)\,(-i)}{4\,i\cdot(-i)} = \frac{-6+2\,i}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i$$

$$z_2 = \frac{-3\,(1+i)-1+3\,i}{2\cdot 2\,i} = \frac{-4}{4\,i} = \frac{-1}{i} = \frac{-1\,(-i)}{i\,(-i)} = \frac{i}{1} = i$$

7) $\Delta = \Big(-(1+12\,i)\Big)^2 - 4\cdot 1\,\Big(-(13+9\,i)\Big) = 1 + 24\,i + 144\,i^2 + 52 + 36\,i =$
$= -91 + 60\,i$

Il s'agit à présent de déterminer les racines carrées de $-91+60\,i$.

Si $z = x + y\,i$ désigne une telle racine carrée, alors on doit avoir :

$-91 + 60\,i = z^2 = (x+y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$

ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} -91 = x^2 - y^2 \\ 60 = 2\,x\,y \end{cases}$

La seconde équation donne $y = \frac{30}{x}$ que l'on substitue dans la première : $-91 = x^2 - \left(\frac{30}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{900}{x^2}$

En multipliant cette dernière équation par x^2, on obtient :

$0 = x^4 + 91\,x^2 - 900 = (x^2-9)\,(x^2+100) = (x+3)\,(x-3)\,(x^2+100)$

(a) Si $x = -3$, alors $y = \frac{30}{-3} = -10$ et la première racine carrée est $-3-10\,i$.

(b) Si $x = 3$, alors $y = \frac{30}{3} = 10$ et la seconde racine carrée est $3+10\,i$.

On peut à présent déterminer les solutions de l'équation :

$$z_1 = \frac{1+12\,i-3-10\,i}{2\cdot 1} = \frac{-2+2\,i}{2} = -1+i$$

$$z_2 = \frac{1+12\,i+3+10\,i}{2\cdot 1} = \frac{4+22\,i}{2} = 2+11\,i$$

8) $\Delta = (7-11\,i)^2 - 4\,(i-3)\,(4+6\,i) = 49 - 154\,i + 121\,i^2 - 16\,i - 24\,i^2 + 48 + 72\,i =$
$-98\,i$

Cherchons les racines carrées de $-98\,i$. Si $z = x+y\,i$ une telle racine carrée, alors $-98\,i = z^2 = (x+y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$, si bien qu'il convient de résoudre le système $\begin{cases} 0 = x^2 - y^2 = (x+y)\,(x-y) \\ -98 = 2\,x\,y \end{cases}$

La première équation implique $y = -x$ ou $y = x$.

(a) Si $y = -x$, alors $-98 = 2\,x\,(-x) = -2\,x^2$, c'est-à-dire $49 = x^2$, d'où l'on tire $x = 7$ ou $x = -7$.

i. Si $x = 7$, alors $y = -7$ et la première racine carrée est $7 - 7\,i$.

ii. Si $x = -7$, alors $y = 7$ et la seconde racine carrée est $-7 + 7\,i$.

(b) Si $y = x$, alors $-98 = 2\,x \cdot x = 2\,x^2$, d'où suit $-49 = x^2$ qui n'admet aucune solution réelle, puisque $x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les racines carrées de Δ étant $7 - 7\,i$ et $-7 + 7\,i$, il reste à calculer les solutions de l'équation.

$$z_1 = \frac{-(7 - 11\,i) + 7 - 7\,i}{2\,(i-3)} = \frac{4\,i}{2\,(i-3)} = \frac{2\,i}{i-3} = \frac{2\,i\,(i+3)}{(i-3)\,(i+3)} =$$
$$= \frac{2\,i^2 + 6\,i}{i^2 + 3\,i - 3\,i - 9} = \frac{-2 + 6\,i}{-10} = \frac{-2}{-10} + \frac{6\,i}{-10} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}\,i$$

$$z_2 = \frac{-(7 - 11\,i) - 7 + 7\,i}{2\,(i-3)} = \frac{-14 + 18\,i}{2\,(i-3)} = \frac{-7 + 9\,i}{i-3} = \frac{(-7 + 9\,i)\,(i+3)}{(i-3)\,(i+3)} =$$
$$= \frac{-7\,i - 21 + 9\,i^2 + 27\,i}{i^2 + 3\,i - 3\,i - 9} = \frac{-30 + 20\,i}{-10} = \frac{-30}{-10} + \frac{20}{-10}\,i = 3 - 2\,i$$