2.7 1) $z^4+1=0$ $\quad S_{\mathbb{R}}=\emptyset$ car $z^4\geq 0$ donc $z^4+1\geq 1\neq 0$

$z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4-i^2=0 \Leftrightarrow 0=(z^2-i)(z^2+i) \overset{2.4(6)(7)}{\Longrightarrow} S=\left\{\pm\left(\frac{\sqrt2}{2}\pm\frac{\sqrt2}{2}i\right)\right\}$

2) $x^4-x^2-1=0$ on pose $y=x^2 \Rightarrow y^2-y-1=0$ $\quad \Delta=1-4(-1)=5 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}=x_{1,2}^2$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2}}\right\}$ et $S_{\mathbb{C}}=\left\{\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2}};\ \pm\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}\,i\right\}$

3) $P(x)=x^3-5x^2+4x-20=0$ on essaie $\frac{\text{div}(20)}{\text{div}(1)}=\pm\{1;2;4;5;10;20\}$

$P(1)\neq0,\ P(2)\neq0,\ P(-1)\neq0,\ P(-2)\neq0,\ P(4)\neq0,\ P(-4)\neq0,\ P(5)=125-125+20-20=0$: youpie

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 4 & -20 \\ 5 & \downarrow & 5 & 0 & 20 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

donc $x_1=5$ et reste $x^2+4=0 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{5\}$ et $S_{\mathbb{C}}=\{5;\pm2i\}$

4) $P(x)=x^3+x-2=0$ on essaie $\pm\{1;2\}$ $\quad P(1)=0$: youpie

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & \downarrow & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

donc $x_1=1$

et reste $x^2+x+2=0$ $\quad \Delta=1-8=-7$ donc $S_{\mathbb{R}}=\{1\}$ et $S_{\mathbb{C}}=\left\{1;\frac{-1\pm\sqrt7\,i}{2}\right\}$

5) $P(x)=x^3+1$ on "voit" $P(-1)=0$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & \downarrow & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

donc $x_1=-1$ et reste $x^2-x+1=0$

$\Delta=1-4=-3$ donc $S_{\mathbb{R}}=\{-1\}$ et $S_{\mathbb{C}}=\left\{-1;\frac{1\pm\sqrt3\,i}{2}\right\}$

6) $P(x)=x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1)$ $\quad \Delta=1-4=-3$ $\quad S_{\mathbb{R}}=\{0;1\}$ et $S_{\mathbb{C}}=\left\{0;1;\frac{-1\pm\sqrt3\,i}{2}\right\}$

Remarque: $t^2=-r$ où $r\geq0$ réel alors $t^2=r\cdot i^2 \Rightarrow t=\pm\sqrt{r}\,i$

2.6 1) $0=z^4-9=(z^2-3)(z^2+3)=(z^2-3)(z^2-3i^2)=(z-\sqrt3)(z+\sqrt3)(z-\sqrt3 i)(z+\sqrt3 i)$ donc $S=\{\pm\sqrt3;\pm\sqrt3 i\}$

2) $0=z^4+z^2-6=(z^2-2)(z^2+3)=(z^2-2)(z^2-3i^2)$ donc $S=\{\pm\sqrt2;\pm\sqrt3 i\}$

3) $z^3-8=z^3-2^3=(z-2)(z^2+2z+4)$ $\quad z_1=2$ et $\Delta=4-4\cdot1\cdot4=-12=12i^2$ $\quad z_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{12}\,i}{2}=\frac{-2\pm\sqrt4\sqrt3\,i}{2}=\frac{2(-1\pm\sqrt3\,i)}{2}$

donc $S=\{2;-1\pm\sqrt3\,i\}$

4) $0=z^4+2(2i-1)z^2-3+4i$ on pose $t=z^2$ donc $0=t^2+(4i-2)t-3+4i$ $\quad \Delta=(4i-2)^2-4(-3+4i)=-16-16i+4+12-16i$

$\Delta=-32i=16(-2i)$ alors $\sqrt\Delta=4\sqrt{-2i}$

$(-2i)=(a+ib)^2=a^2-b^2+2abi$ donc on résoud $\begin{cases}0=a^2-b^2\\-1=ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0=a^2-\frac{1}{a^2} \mid\cdot a^2\\ b=\frac{-1}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a^4-1\\ b=\frac{-1}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm1\\ b=\frac{-1}{a}\end{cases}$

donc $\sqrt{-2i}=\pm(1-i)$ et ainsi $\sqrt\Delta=\pm4(1-i)$ et donc $t_{1,2}=\frac{2-4i\pm4(1-i)}{2}=\begin{cases}\frac{6-8i}{2}=3-4i=z^2\\ \frac{-2}{2}=-1=z^2\end{cases}$

(ces solutions pourraient être déduites aussi à partir de somme et produit)

on calcul $\sqrt{3-4i}=a+ib$ donc $3-4i=a^2-b^2+2abi$: $\begin{cases}3=a^2-b^2\\-2=ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3=a^2-\frac{4}{a^2}\mid\cdot a^2\\ b=\frac{-2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2=a^4-4\\ b=\frac{-2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0=a^4-3a^2-4=(a^2-4)(a^2+1)\\ b=\frac{-2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm2\\ b=\frac{-2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2 \text{ et } b=1\\ a=2 \text{ et } b=-1\end{cases}$ donc $S=\{\pm(2-i);\pm i\}$