

3 Équations du 3^e degré

3.1 Formule de Cardan

- 1) Définissons le nombre complexe j par $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vérifier que :

- (a) $j^3 = 1$
- (b) $j^2 = \bar{j}$
- (c) $1 + j + j^2 = 0$

- 2) Soient a et b deux nombres complexes arbitraires. Posons

$$x_1 = a + b, \quad x_2 = a j + b j^2 \quad \text{et} \quad x_3 = a j^2 + b j.$$

Montrer que :

- (a) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
- (b) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -3 a b$
- (c) $x_1 x_2 x_3 = a^3 + b^3$

- 3) Soit $P(x)$ le polynôme unitaire du 3^e degré ayant comme racines x_1, x_2 et x_3 . Montrer que :

$$P(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)x - (x_1 x_2 x_3).$$

- 4) Montrer que l'équation $x^3 + p x + q = 0$ admet les solutions x_1, x_2 et x_3 si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} p = -3 a b \\ q = -(a^3 + b^3) \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 b^3 = \frac{-p^3}{27} \\ a^3 + b^3 = -q \end{cases}$$

- 5) Montrer que ces conditions sont satisfaites si et seulement si a^3 et b^3 sont les solutions de l'équation $X^2 + q X - \frac{p^3}{27} = 0$.

- 6) En déduire que :

- (a) si le nombre réel $27 q^2 + 4 p^3 > 0$, alors

$$a^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27 q^2 + 4 p^3}{27}} \quad \text{et} \quad b^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27 q^2 + 4 p^3}{27}};$$

- (b) si le nombre réel $27 q^2 + 4 p^3 = 0$, alors $a^3 = b^3 = -\frac{q}{2}$;

- (c) si le nombre réel $27 q^2 + 4 p^3 < 0$, alors

$$a^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{27 q^2 + 4 p^3}{27}}i \quad \text{et} \quad b^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{27 q^2 + 4 p^3}{27}}i.$$

- 7) En conclure que l'équation $x^3 + px + q = 0$,
 (a) si $27q^2 + 4p^3 > 0$, admet pour unique solution réelle :

$$x_1 = a + b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}$$

montrer que, dans ce cas, les solutions x_2 et x_3 sont complexes conjuguées, c'est-à-dire $x_2 = \overline{x_3}$;

- (b) si $27q^2 + 4p^3 = 0$, admet pour solutions $x_1 = 2a$ et $x_2 = x_3 = -a$.

3.2 Résoudre les équations suivantes à l'aide de la formule de Cardan :

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) $x^3 + 9x - 26 = 0$ | 2) $x^3 - 3x + 2 = 0$ |
| 3) $x^3 - 15x - 126 = 0$ | 4) $x^3 + 24x - 56 = 0$ |
| 5) $x^3 - 12x - 16 = 0$ | 6) $x^3 + 45x - 98 = 0$ |

3.3 Considérons l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.

- 1) Montrer, en utilisant la formule de Cardan, que :

$$a^3 = 2 - 11i \quad \text{et} \quad b^3 = 2 + 11i.$$

- 2) Vérifier que $(2 - i)^3 = 2 - 11i$.
 On peut donc choisir $a = 2 - i$, car $2 - i$ est l'une des trois racines cubiques de $2 - 11i$.
 3) Déterminer la valeur de b à partir de la valeur de a en utilisant l'équation $p = -3ab$ de l'exercice 3.1 4).
 4) En déduire les solutions de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.
 5) Montrer que aj et aj^2 sont également des racines cubiques de a^3 . Remarquer que le choix de aj (ou de aj^2) à la place de a comme racine cubique de a^3 en 2) ne modifierait pas les solutions trouvées en 4).

3.4 1) Vérifier l'égalité $(4 - i)^3 = 52 - 47i$.

- 2) Résoudre l'équation $x^3 - 51x - 104 = 0$.

3.5 Montrer que l'équation générale du 3^e degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut se ramener à une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$:

- 1) en la divisant d'abord par a ;
 2) en remplaçant ensuite x par $X - \frac{b}{3a}$.

- 3.6** Considérons l'équation $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.
- 1) Se ramener, par un changement de variable, à résoudre $X^3 - 6X - 9 = 0$.
 - 2) Montrer que les trois solutions de cette dernière équation sont :
 $X_1 = 3, X_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $X_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
 - 3) Résoudre l'équation $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.
- 3.7** Considérons l'équation $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$.
- 1) Se ramener, par un changement de variable, à résoudre $X^3 - 3X - 2 = 0$.
 - 2) Montrer que les trois solutions de cette dernière équation sont :
 $X_1 = 2$ et $X_2 = X_3 = -1$.
 - 3) Résoudre l'équation $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$.
- 3.8** Considérons l'équation $x^3 + 4x^2 + 2x - 28 = 0$.
- 1) Déterminer un entier naturel α qui soit solution « évidente » de cette équation.
 - 2) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$x^3 + 4x^2 + 2x - 28 = (x - \alpha)(x^2 + ax + b)$$
 - 3) Résoudre $x^3 + 4x^2 + 2x - 28 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Réponses

- 3.2** 1) $S = \{2; -1 + 2\sqrt{3}i; -1 - 2\sqrt{3}i\}$ 2) $S = \{-2; 1\}$
 3) $S = \{6; -3 + 2\sqrt{3}i; -3 - 2\sqrt{3}i\}$ 4) $S = \{2; -1 + 3\sqrt{3}i; -1 - 3\sqrt{3}i\}$
 5) $S = \{-2; 4\}$ 6) $S = \{2; -1 + 4\sqrt{3}i; -1 - 4\sqrt{3}i\}$
- 3.3** 3) $b = 2 + i$ 4) $S = \{4; -2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}\}$
- 3.4** 2) $S = \{8; -4 - \sqrt{3}; -4 + \sqrt{3}\}$
- 3.6** 3) $S = \{5; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$
- 3.7** 3) $S = \{2; 5\}$
- 3.8** 1) $\alpha = 2$ 2) $a = 6$ et $b = 14$
 3) $S = \{2; -3 - \sqrt{5}i; -3 + \sqrt{5}i\}$