

3.1

$$1) \text{ (a) } j^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \\ = -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}i}{8} - \frac{9i^2}{8} + \frac{3\sqrt{3}i^3}{8} = \frac{-1+9+3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\text{ (b) } j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \\ = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{j}$$

$$\text{ (c) } 1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$2) \text{ (a) } x_1 + x_2 + x_3 = (a + b) + (aj + bj^2) + (aj^2 + bj) = \\ a + aj + aj^2 + b + bj + bj^2 = a(1 + j + j^2) + b(1 + j + j^2) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

$$\text{ (b) } x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \\ (a + b)(aj + bj^2) + (aj + bj^2)(aj^2 + bj) + (aj^2 + bj)(a + b) = \\ a^2 j + abj^2 + abj + b^2 j^2 + a^2 j^3 + abj^2 + abj^4 + b^2 j^3 + a^2 j^2 + abj^2 + \\ abj + b^2 j = \\ a^2(j + j^2 + j^3) + ab(j + j^2 + j^2 + j^4 + j^2 + j) + b^2(j + j^2 + j^3) = \\ a^2(1 + j + j^2) + ab(3j + 3j^2) + b^2(1 + j + j^2) = \\ a^2 \cdot 0 + 3ab(j + j^2) + b^2 \cdot 0 = 3ab(j + j^2) = -3ab \\ \text{car l'identité } 1 + j + j^2 = 0 \text{ implique } j + j^2 = -1.$$

$$\text{ (c) } x_1 x_2 x_3 = (a + b)(aj + bj^2)(aj^2 + bj) = \\ (a^2 j + abj^2 + abj + b^2 j^2)(aj^2 + bj) = \\ a^3 j^3 + a^2 bj^2 + a^2 bj^4 + ab^2 j^3 + a^2 bj^3 + ab^2 j^2 + ab^2 j^4 + b^3 j^3 = \\ a^3 + a^2 b(j^2 + j^3 + j^4) + ab^2(j^2 + j^3 + j^4) + b^3 = \\ a^3 + a^2 bj^2(1 + j + j^2) + ab^2 j^2(1 + j + j^2) + b^3 = \\ a^3 + a^2 bj^2 \cdot 0 + ab^2 j^2 \cdot 0 + b^3 = a^3 + b^3$$

3) Par définition du polynôme $P(x)$, on a :

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)(x - x_3) = \\ x^3 - x_3x^2 - x_2x^2 + x_2x_3x - x_1x^2 + x_1x_3x + x_1x_2x - x_1x_2x_3 = \\ x^3 - x_1x^2 - x_2x^2 - x_3x^2 + x_1x_2x + x_2x_3x + x_1x_3x - x_1x_2x_3 = \\ x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - (x_1x_2x_3)$$

4) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) L'équation $x^3 + px + q = 0$ admet les solutions x_1, x_2 et x_3 .

$$\text{ (b) } x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{ (c) } x^3 + px + q = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - (x_1x_2x_3)$$

$$(d) \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = -(x_1 + x_2 + x_3) \\ p = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \\ q = -(x_1 x_2 x_3) \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} p = -3ab \\ q = -(a^3 + b^3) \end{cases} \iff \begin{cases} p^3 = -27a^3b^3 \\ -q = a^3 + b^3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^3b^3 = \frac{-p^3}{27} \\ a^3 + b^3 = -q \end{cases}$$

5) (a) Supposons $-\frac{p^3}{27} = a^3b^3$ et $q = -(a^3 + b^3)$. On a :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = X^2 - (a^3 + b^3)X + a^3b^3 = (X - a^3)(X - b^3)$$

dont les zéros sont manifestement a^3 et b^3 .

(b) Supposons que a^3 et b^3 sont les zéros du polynôme $X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$. Vu les formules de Viète, on a d'une part $a^3 + b^3 = -\frac{q}{1} = -q$ et d'autre

$$\text{part } a^3b^3 = \frac{\frac{p^3}{27}}{1} = \frac{p^3}{27}.$$

6) Résolvons directement l'équation $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$:

$$\Delta = q^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{p^3}{27}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{27}$$

(a) Si $27q^2 + 4p^3 > 0$, alors $\Delta > 0$ et les deux zéros (a^3 et b^3) valent :

$$a^3 = \frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2 \cdot 1} = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}$$

$$b^3 = \frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2 \cdot 1} = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}$$

(b) Si $27q^2 + 4p^3 = 0$, alors $\Delta = 0$ et il y a une solution double ($a^3 = b^3$) égale à $\frac{-q}{2 \cdot 1} = -\frac{q}{2}$.

(c) Si $27q^2 + 4p^3 < 0$, alors $\Delta < 0$. Il n'y a pas de solution réelle, mais puisque $\Delta i^2 = -\Delta > 0$, il y a deux solutions complexes :

$$a^3 = \frac{-q - \sqrt{-\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}i}{2 \cdot 1} = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}i$$

$$b^3 = \frac{-q + \sqrt{-\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}i}{2 \cdot 1} = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}i$$

7) (a) Si $27q^2 + 4p^3 > 0$, alors nous avons :

$$a^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \text{ et } b^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}.$$

On en déduit les valeurs de a et de b :

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}} \text{ et } b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}.$$

À partir de ces valeurs de a et de b , on peut établir les solutions de l'équation $x^3 + px + q = 0$:

$$x_1 = a + b, \quad x_2 = aj + bj^2, \quad x_3 = aj^2 + bj.$$

Comme $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, seul x_1 est une solution réelle, tandis que x_2 et x_3 sont des solutions complexes.

$$\text{On a bien } x_1 = a + b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}.$$

$$\text{Enfin, } \overline{x_3} = \overline{aj^2 + bj} = \overline{a} \overline{j^2} + \overline{b} \overline{j} = a \overline{j} + bj^2 = aj + bj^2 = x_2$$

$$(b) \text{ Si } 27q^2 + 4p^3 = 0, \text{ alors } a^3 = b^3 = -\frac{q}{2}, \text{ si bien que } a = b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

$$x_1 = a + b = a + a = 2a$$

$$x_2 = aj + bj^2 = aj + aj^2 = a(j + j^2) = a(-1) = -a$$

$$x_3 = aj^2 + bj = aj^2 + aj = a(j + j^2) = a(-1) = -a$$

(On rappelle que l'identité $1 + j + j^2 = 0$ implique $j + j^2 = -1$.)