3.3

1) $27\,q^2+4\,p^3=27\cdot(-4)^2+4\cdot(-15)^3=-13\ 068<0 \qquad -\frac{-13\ 068}{27}=484=22^2$

$a^3=-\frac{-4}{2}-\frac{1}{2}\cdot 22\,i=2-11\,i$

$b^3=-\frac{-4}{2}+\frac{1}{2}\cdot 22\,i=2+11\,i$

2) $(2-i)^3=2^3-3\cdot 2^2\,i+3\cdot 2\,i^2-i^3=8-12\,i-6+i=2-11\,i$

3) L'équation $p=-3\,a\,b$ donne

$$b=\frac{p}{-3\,a}=\frac{-15}{-3\,(2-i)}=\frac{5}{2-i}=\frac{5\,(2+i)}{(2-i)\,(2+i)}=\frac{10+5\,i}{5}=\frac{10}{5}+\frac{5}{5}\,i=$$
$$=2+i$$

4) $x_1=a+b=(2-i)+(2+i)=4$

$x_2=a\,j+b\,j^2=(2-i)\,\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)+(2+i)\,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=$

$=-1+\sqrt{3}\,i+\frac{1}{2}\,i+\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\sqrt{3}\,i-\frac{1}{2}\,i+\frac{\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}$

$x_3=a\,j^2+b\,j=(2-i)\,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)+(2+i)\,\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=$

$=-1-\sqrt{3}\,i+\frac{1}{2}\,i-\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\sqrt{3}\,i-\frac{1}{2}\,i-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$

5) $(a\,j)^3=a^3\,j^3=a^3\cdot 1=a^3$

$(a\,j^2)^3=a^3\,j^6=a^3\,(j^3)^2=a^3\cdot 1^2=a^3$

(a) Si l'on choisit plutôt $a'=a\,j$, alors $b'=\frac{p}{-3\,a'}=\frac{p}{-3\,a\,j}$.

Or l'égalité $j^3=1$ implique $j^2=\frac{1}{j}$.

Donc $b'=\frac{p}{-3\,a}\cdot\frac{1}{j}=\frac{p}{-3\,a}\cdot j^2=b\,j^2$.

$x'_1=a'+b'=a\,j+b\,j^2=x_2$

$x'_2=a'\,j+b'\,j^2=a\,j\,j+b\,j^2\,j^2=a\,j^2+b\,j^4=a\,j^2+b\,j=x_3$

$x'_3=a'\,j^2+b'\,j=a\,j\,j^2+b\,j^2\,j=a\,j^3+b\,j^3=a+b=x_1$

(b) Le choix $a''=a\,j^2$ donne $b''=\frac{p}{-3\,a''}=\frac{p}{-3\,a\,j^2}$.

Mais l'égalité $j^3=1$ fournit l'identité $j=\frac{1}{j^2}$.

Ainsi $b''=\frac{p}{-3\,a}\cdot\frac{1}{j^2}=\frac{p}{-3\,a}\cdot j=b\,j$.

$x''_1=a''+b''=a\,j^2+b\,j=x_3$

$x''_2=a''\,j+b''\,j^2=a\,j^2\,j+b\,j\,j^2=a\,j^3+b\,j^3=a+b=x_1$

$x''_3=a''\,j^2+b''\,j=a\,j^2\,j^2+b\,j\,j=a\,j^4+b\,j^2=a\,j+b\,j^2=x_2$