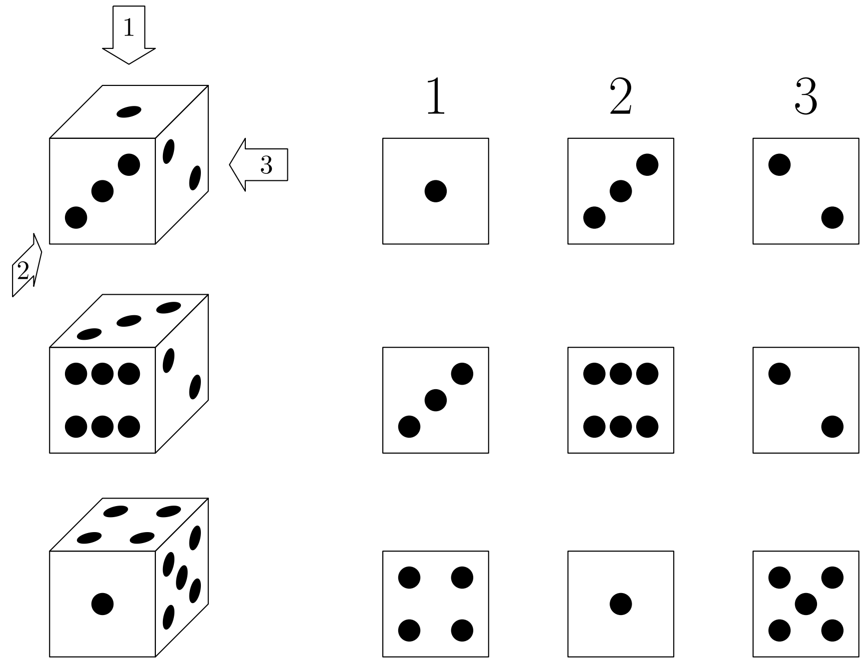
1 Introduction

L'axonométrie est un procédé de représentation d'un espace à trois dimensions (l'espace au sens courant du terme) sur un espace à deux dimensions (le plan).

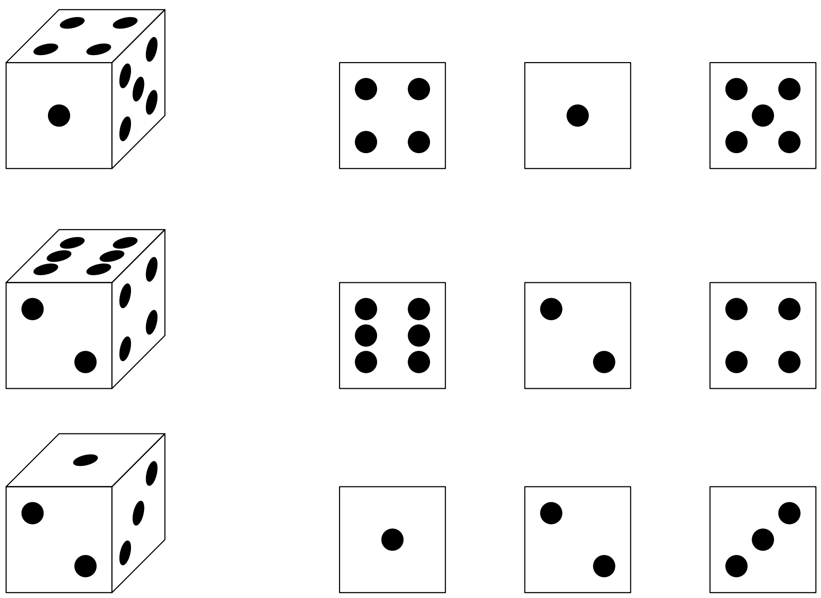
Ce procédé doit permettre :

– de faire correspondre à toute figure de l'espace une ou plusieurs figures planes déterminées qui en constituent la représentation ;
– réciproquement, de déterminer une figure de l'espace si l'on connaît sa représentation.

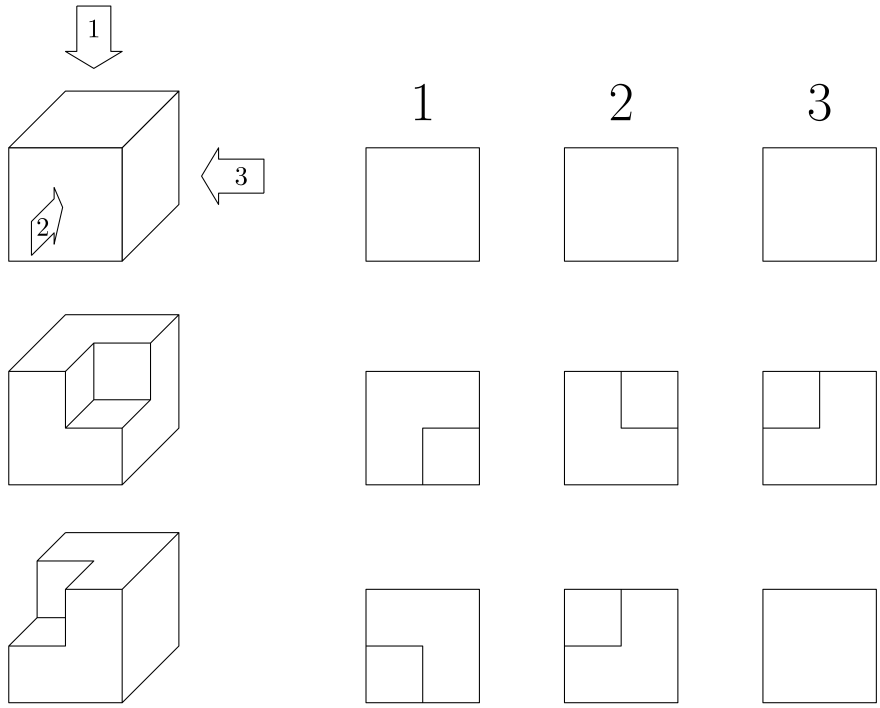
1.1 1) Dessiner les vues 1, 2, 3 :



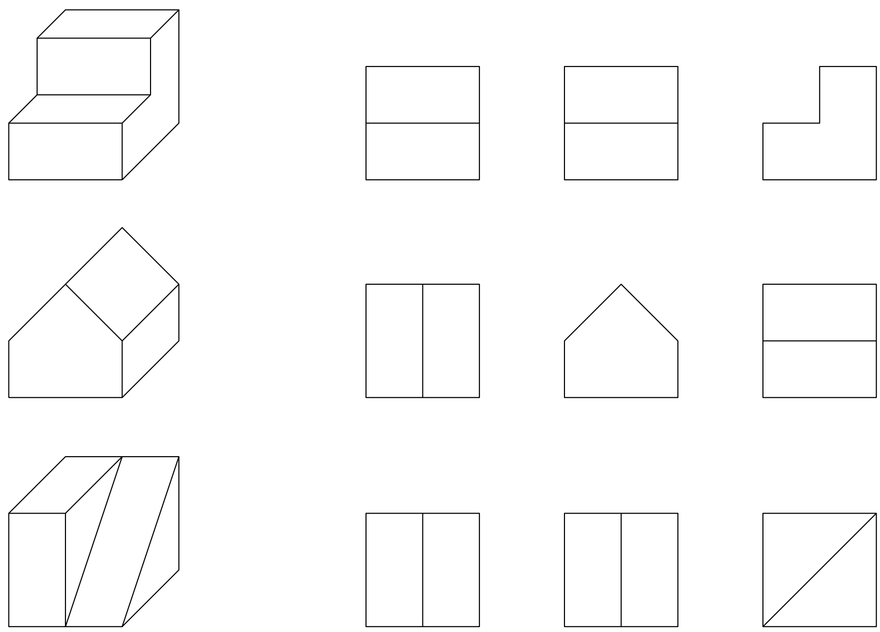
2) Compléter la perspective à gauche :



1.2 1) Dessiner les vues 1, 2, 3 :



2) Compléter la perspective à gauche :

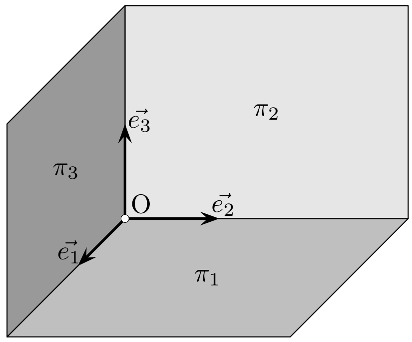


Système d'axes

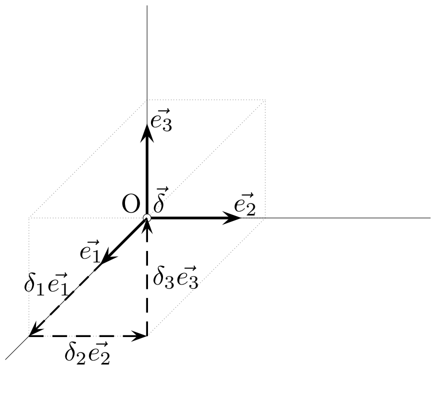
On considère un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ de l'espace.

On appelle **sol** le plan $\pi_1(\mathrm{O}\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, **mur** ou **tableau** le plan $\pi_2(\mathrm{O}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ et **paroi** le plan $\pi_3(\mathrm{O}\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_3})$.

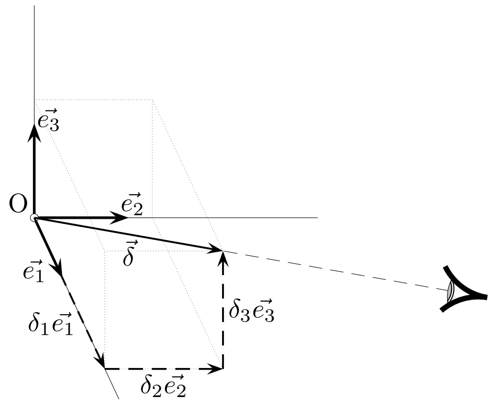
L'axe 2 est aussi appelé la **ligne de terre**.



La représentation de l'espace en axonométrie cavalière correspond à la vision d'un observateur très éloigné. La droite passant par l'origine O et l'œil de l'observateur a la direction définie par le vecteur $\vec{\delta}$ appelé **noyau** du système d'axes. L'observateur voit tous les points de cette droite superposés en O.

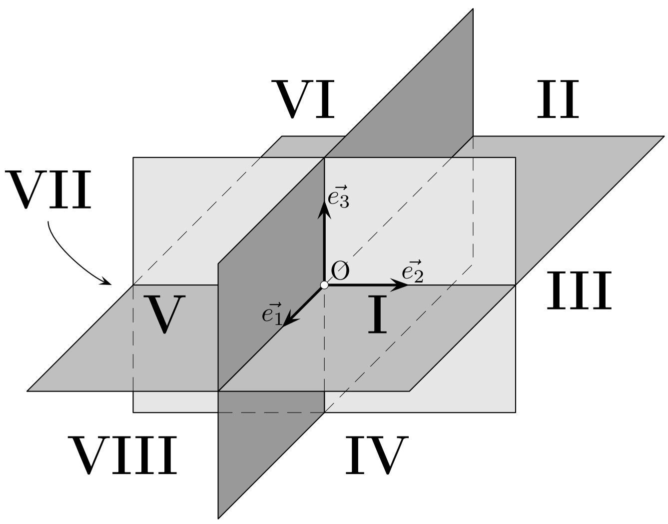


situation initiale



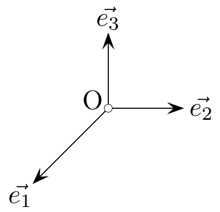
depuis un autre point de vue

On définit les quadrants de I à VIII comme les différentes régions de l'espace déterminées par les plans π_1, π_2 et π_3.

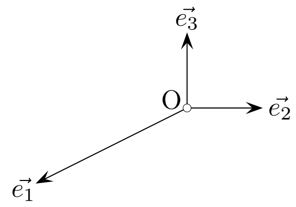


1.3

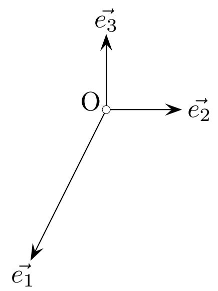
1) Représenter le vecteur $\vec{e_1} = -\vec{e_2} - \vec{e_3}$:



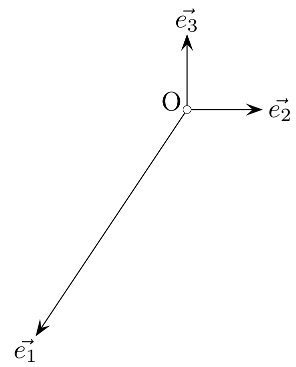
2) Représenter le vecteur $\vec{e_1} = -2\,\vec{e_2} - \vec{e_3}$:



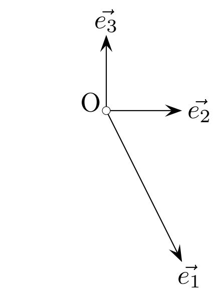
3) Représenter le vecteur $\vec{e_1} = -\vec{e_2} - 2\,\vec{e_3}$:



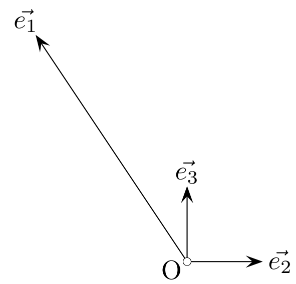
4) Représenter le vecteur $\vec{e_1} = -2\,\vec{e_2} - 3\,\vec{e_3}$:



5) Représenter le vecteur $\vec{e_1} = \vec{e_2} - 2\,\vec{e_3}$:

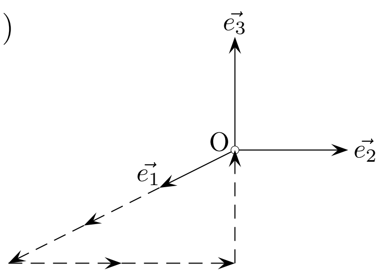


6) Représenter le vecteur $\vec{e_1} = -2\,\vec{e_2} + 3\,\vec{e_3}$:

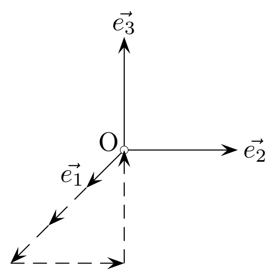


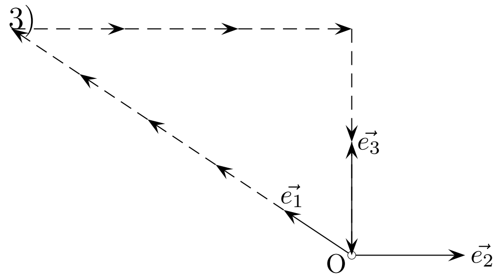
1.4 Déterminer un vecteur parallèle au noyau dans chaque cas :

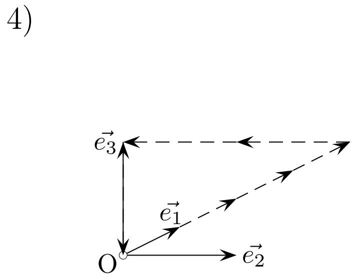
1)



2)



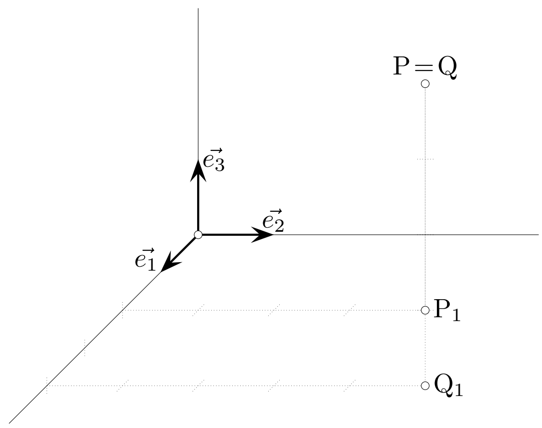




L'épure axonométrique d'un point

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p_1\,\vec{e_1} + p_2\,\vec{e_2} + p_3\,\vec{e_3}$ donne l'image axonométrique d'un point $\mathrm{P}(p_1\,;p_2\,;p_3)$ dans le plan. Cette image est définie de manière unique.

En revanche, un point n'est pas identifiable uniquement par son image axonométrique, car tous les points alignés parallèlement au noyau $\vec{\delta}$ ont même image axonométrique. Par exemple, dans l'axonométrie de noyau $\vec{\delta} = 2\,\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, les points $\mathrm{P}(2\,;4\,;3)$ et $\mathrm{Q}(4\,;5\,;4)$ ont la même image axonométrique.

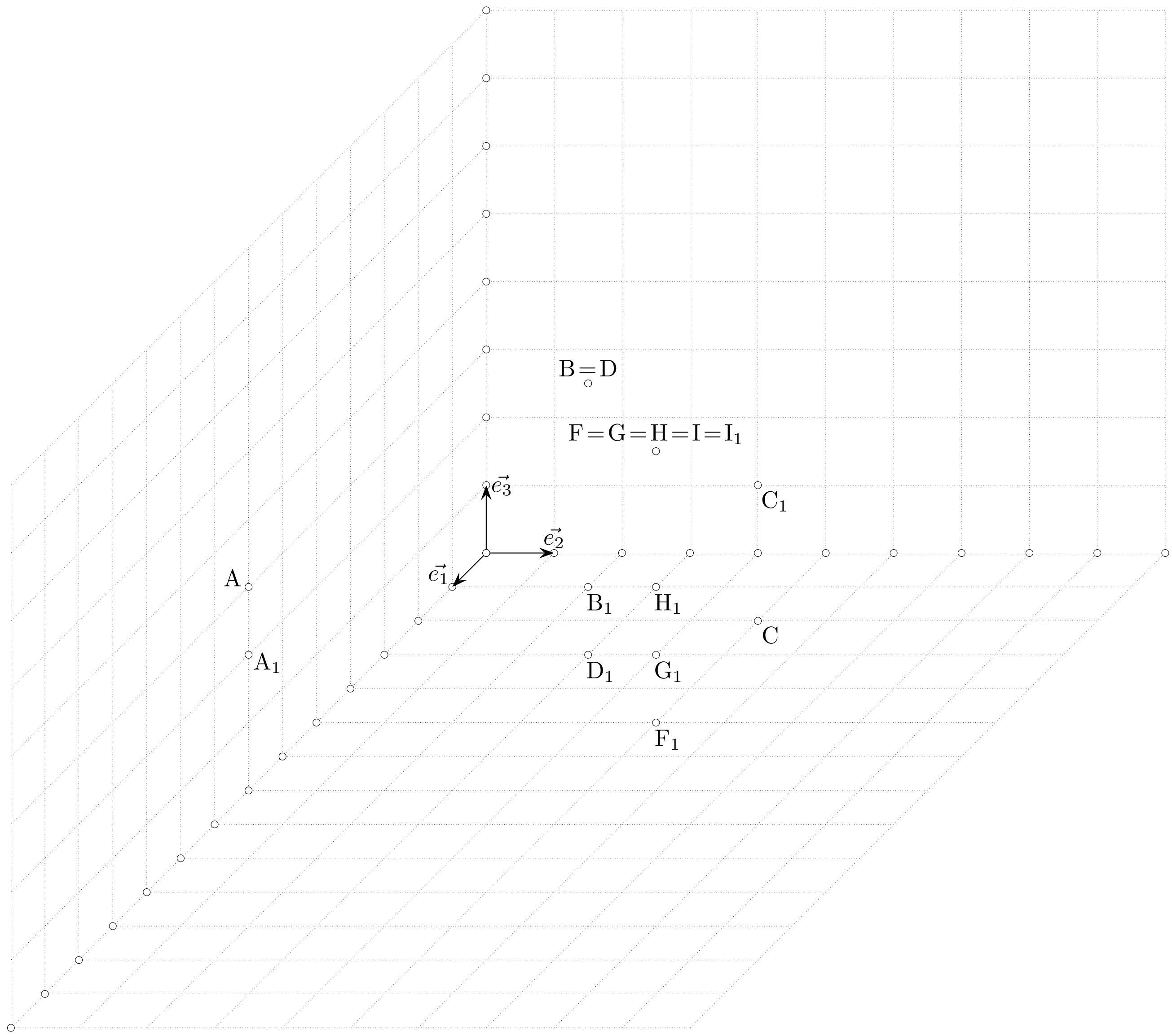


Il est donc nécessaire de préciser l'emplacement d'un point de l'espace en dessinant aussi l'image axonométrique de sa projection au sol, affectée de l'indice 1. L'**épure axonométrique** d'une figure est sa double représentation par son image axonométrique et celle de sa projection au sol.

On convient pour la visibilité de l'épure que l'observateur est placé dans le quadrant I. Lorsque deux points ont des images axonométriques confondues, celui qui a la plus grande abscisse (première coordonnée) **cache** l'autre.

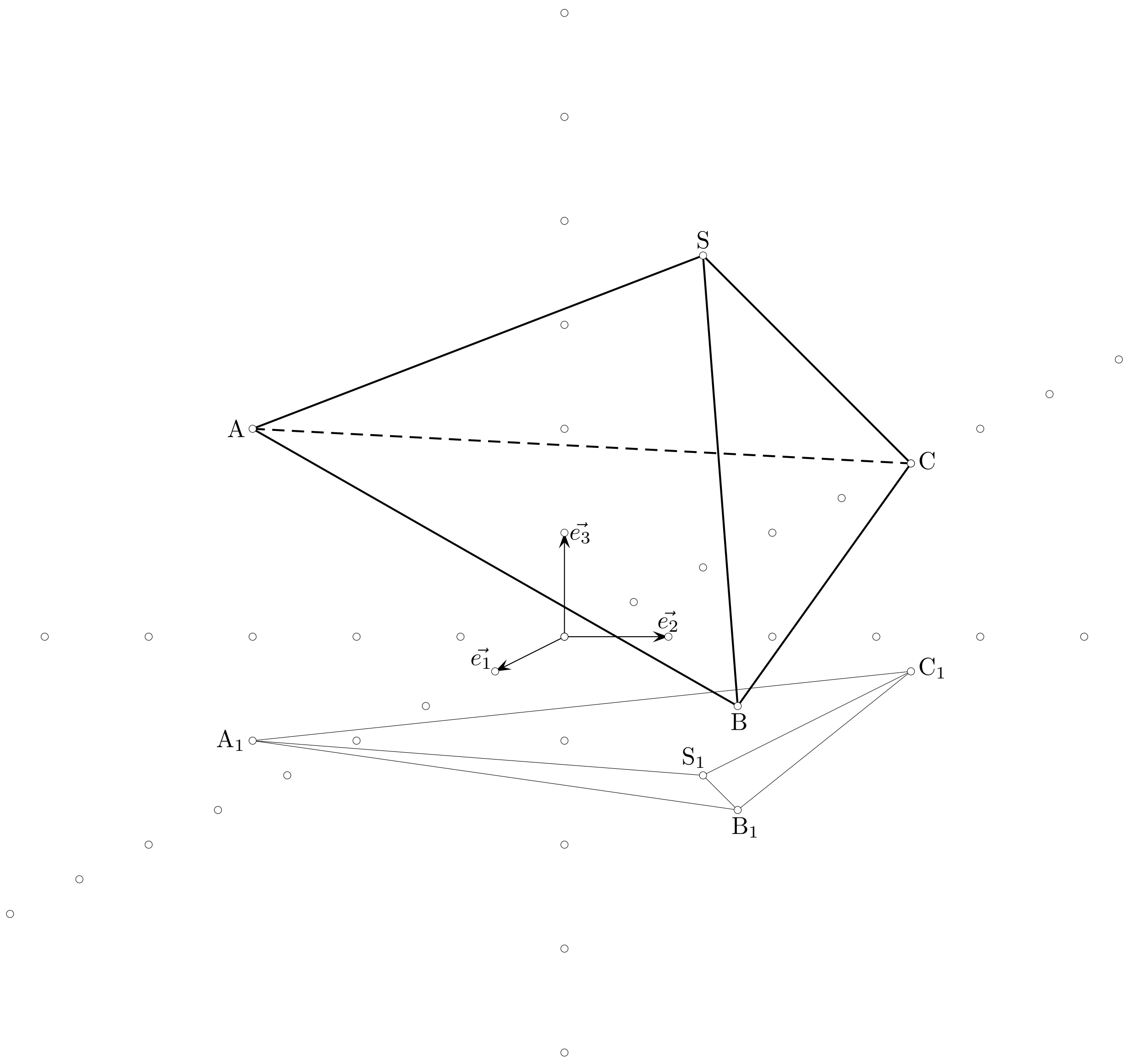
Dans cet exemple, le point Q cache le point P.

1.5



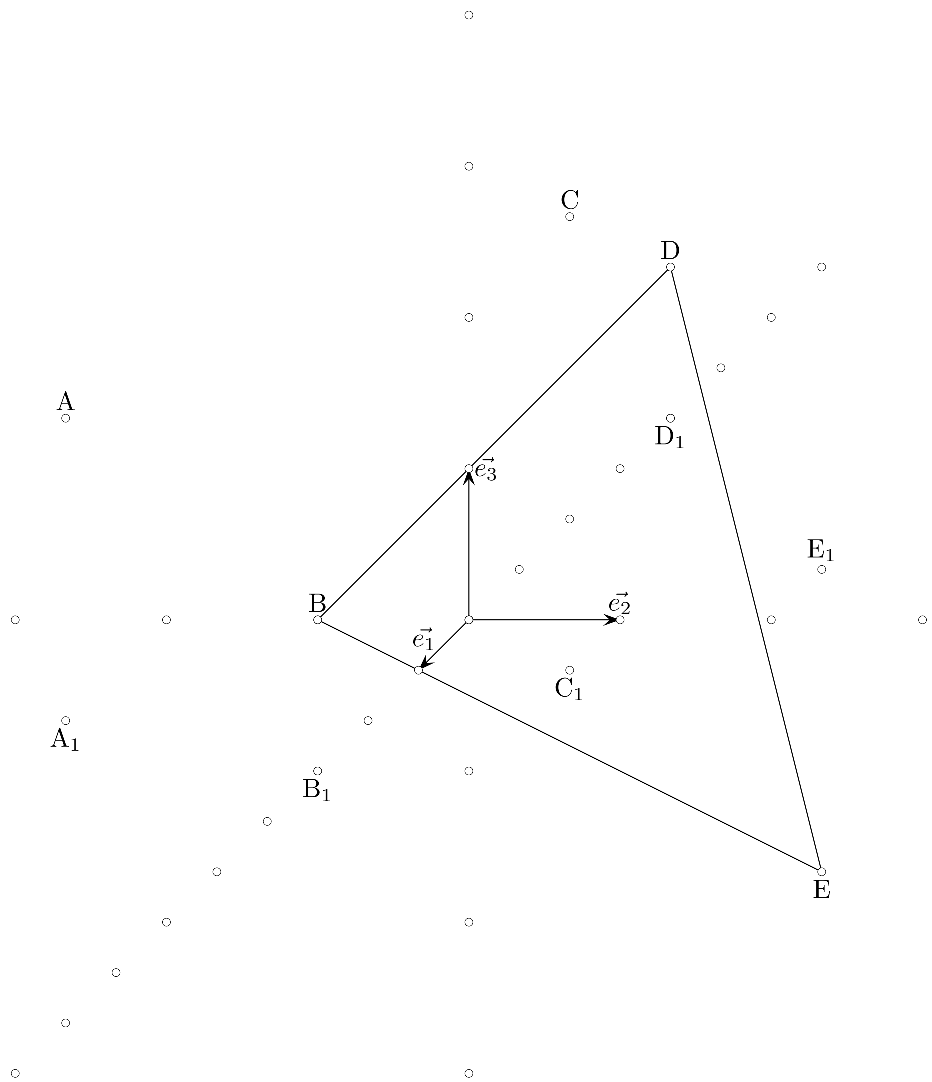
1) Représenter les points A(3 ; −2 ; 1), B(1 ; 2 ; 3), C(−2 ; 3 ; −2) et D(3 ; 3 ; 4). Que peut-on dire des points B et D ?
2) Représenter les points F(5 ; 5 ; 4), G(3 ; 4 ; 3), H(1 ; 3 ; 2) et I(−3 ; 1 ; 0).
3) Déterminer le noyau de cette axonométrie.
4) Dans quels quadrants se trouvent les points A, B, C, D et I ?

1.6



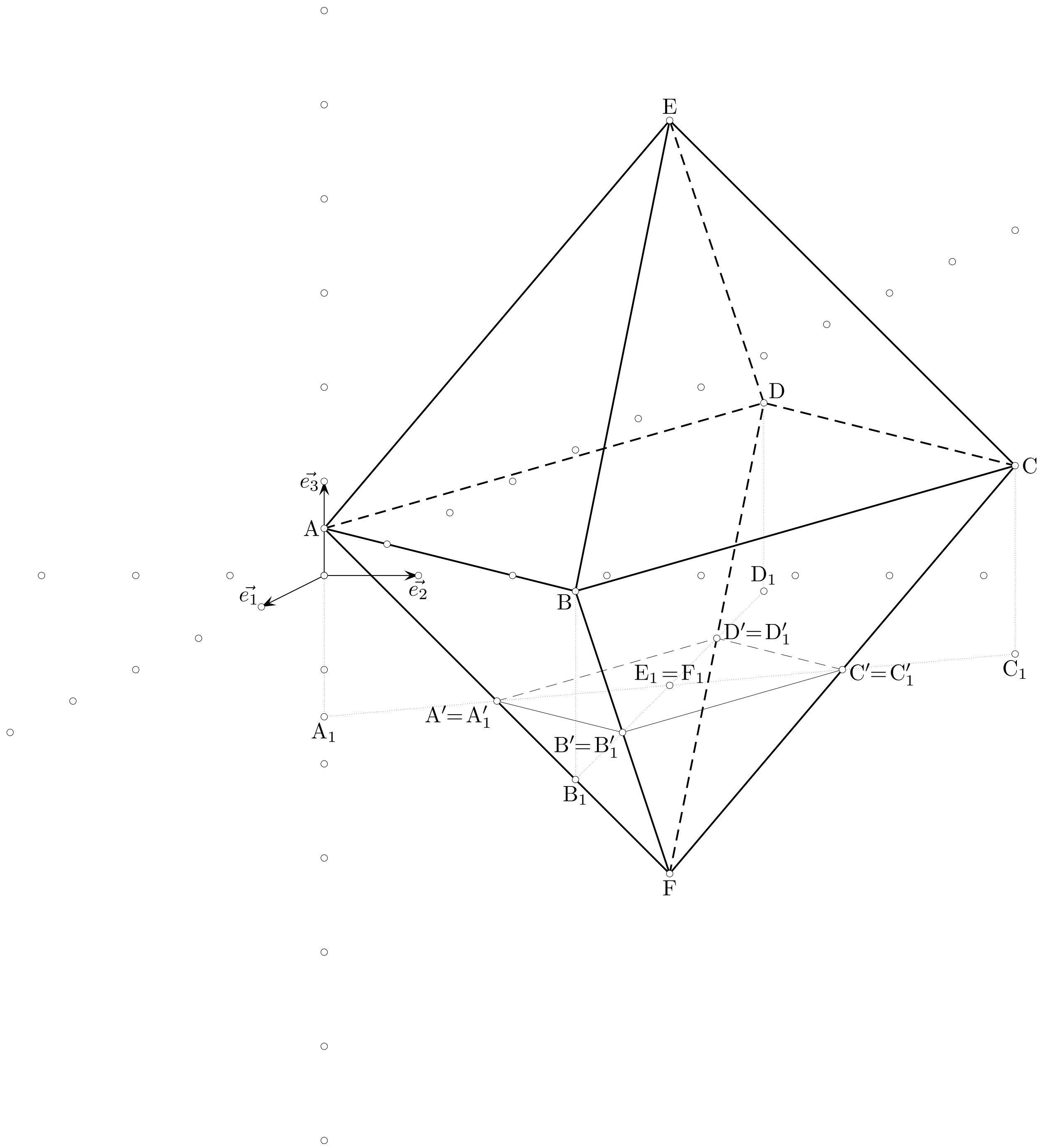
1) Déterminer, par mesure sur la figure, les coordonnées des sommets de la pyramide SABC.
2) Déterminer le noyau de cette axonométrie.

1.7



1) Déterminer, par mesure sur la figure, les coordonnées des points A, B, C, D et E.
2) Montrer graphiquement que le point C n'appartient pas au plan BDE.
3) Déterminer les quadrants dans lesquels se trouvent les points A, B, C, D et E.

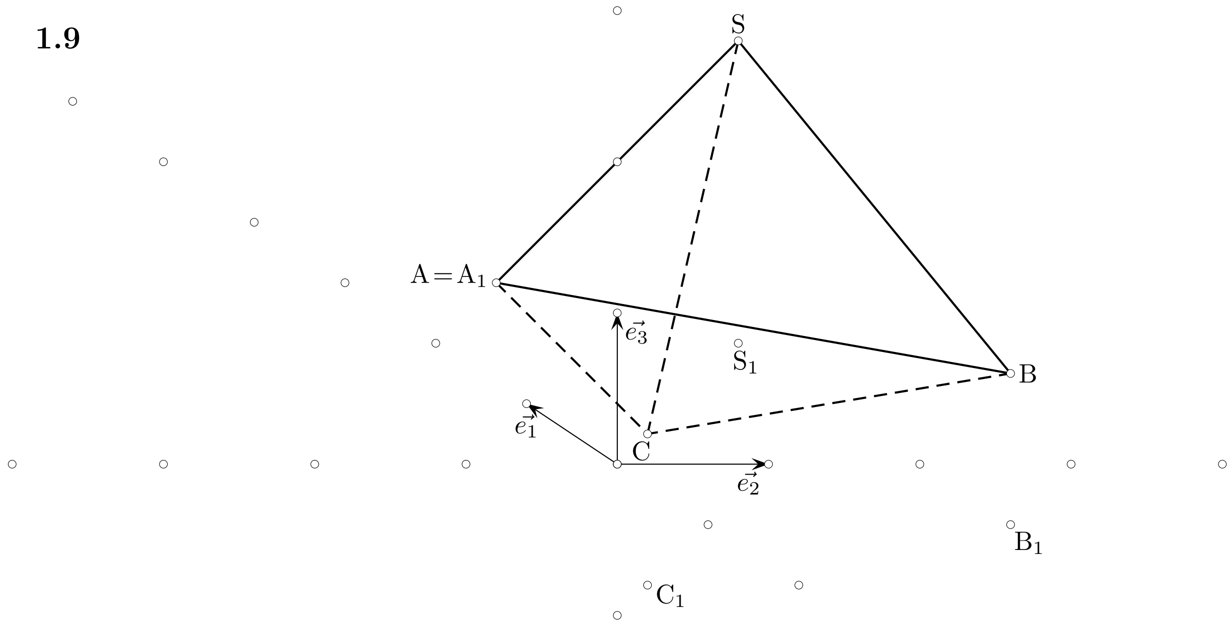
1.8



ABCD est parallèle à π_1 et A′, B′, C′, D′ correspondent aux intersections des arêtes AF, BF, CF, DF avec le sol.

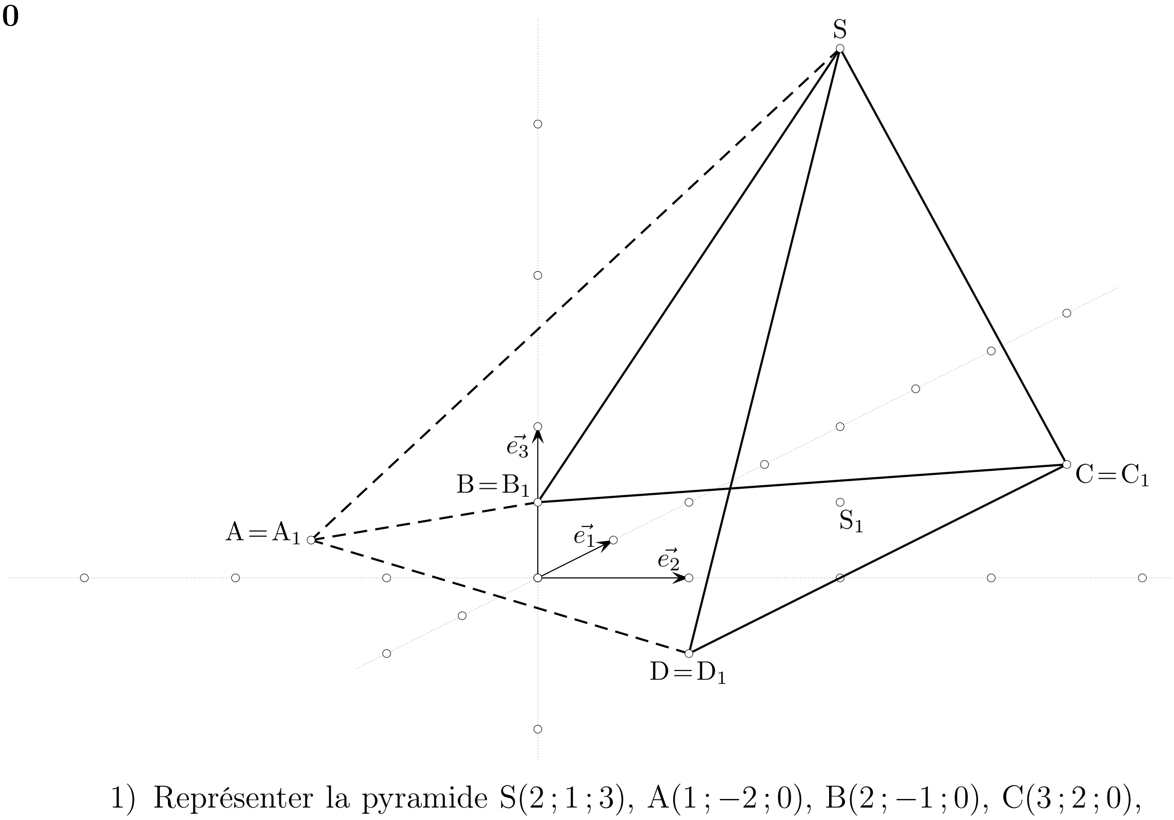
1) Déterminer, par mesure sur la figure, les coordonnées des sommets de l'octaèdre ABCDEF.
2) Déterminer la hauteur EF de l'octaèdre.

1.9



1) Déterminer, par mesure sur la figure, les coordonnées des sommets de la pyramide SABC.
2) Déterminer les composantes d'un vecteur de même direction que le noyau de l'axonométrie.
3) Dans quels quadrants se trouvent les points A, B, C et S ?

1.10



1) Représenter la pyramide S$(2\,;1\,;3)$, A$(1\,;-2\,;0)$, B$(2\,;-1\,;0)$, C$(3\,;2\,;0)$, D$(-2\,;2\,;0)$ dans l'axonométrie ci-dessus.
2) Déterminer les composantes d'un vecteur de même direction que le noyau de l'axonométrie.

1.11 Dans une axonométrie de noyau contenant le vecteur $\vec{n} = 4\,\vec{e_1} - 3\,\vec{e_2} + 2\,\vec{e_3}$, représenter le cube ABCDEFGH sachant que sa face inférieure est centrée en $\mathrm{I}(-2\,;0\,;-2)$, que $\overrightarrow{\mathrm{IA}} = 2\,\vec{e_2}$ et que $\overrightarrow{\mathrm{IB}} = 2\,\vec{e_1}$.

Feuille disposée verticalement, origine à 12 cm du bord gauche et centrée verticalement, unité 2 cm

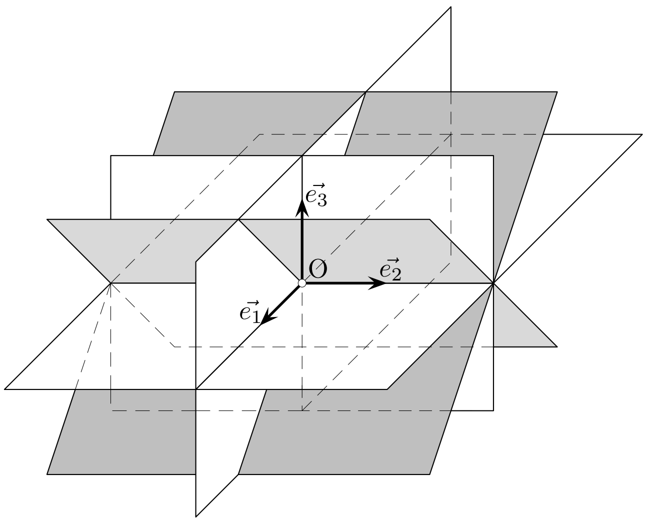
1.12 Soit un point $\mathrm{P}(p_1\,;p_2\,;p_3)$. Quelles sont les conditions sur p_1, p_2 et p_3 pour que :

1) P soit dans le quadrant III
2) P soit dans le quadrant VII
3) P soit dans le quadrant V
4) $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1$ dans l'espace
5) P et P_1 soient confondus en axonométrie
6) P_1 soit sur la ligne de terre

1.13 On appelle **premier plan bissecteur** le plan faisant un angle de 45° avec le sol et le tableau et passant par les quadrants I, III, V, VII.

On appelle **deuxième plan bissecteur** le plan faisant un angle de 45° avec le sol et le tableau et passant par les quadrants II, IV, VI, VIII.

1) Dessiner les deux plans bissecteurs dans le repère ci-dessous.
2) Soit $\mathrm{P}(p_1\,;p_2\,;p_3)$ un point. Quelles sont les conditions sur p_1, p_2 et p_3 pour que :
   (a) P soit dans le premier plan bissecteur ?
   (b) P soit dans le deuxième plan bissecteur ?



1.14 Un point P est situé à une distance d_1 de π_1, d_2 de π_2 et d_3 de π_3. Donner les coordonnées de P lorsque :

1) $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ et P est dans le quadrant IV ;
2) $d_1 = 3$, $d_2 = 1$, $d_3 = 4$ et P est dans le quadrant II ;

3) $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ et P est dans le deuxième plan bissecteur ainsi que dans le quadrant VI.

1.15 Sur la figure de l'exercice 1.5, dessiner et donner les coordonnées des symétriques de :

1) A relativement à π_2
2) B relativement à π_1
3) B relativement à π_3
4) B relativement au premier plan bissecteur
5) C relativement au deuxième plan bissecteur

Réponses

1.4
1) $\vec{\delta} = 3\,\vec{e_1} + 2\,\vec{e_2} + \vec{e_3}$ 2) $\vec{\delta} = 3\,\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$
3) $\vec{\delta} = 5\,\vec{e_1} + 3\,\vec{e_2} - 2\,\vec{e_3}$ 4) $\vec{\delta} = 4\,\vec{e_1} - 2\,\vec{e_2} - \vec{e_3}$

1.5
1) Le point D cache le point B.
3) $\vec{\delta} = 2\,\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$
4) A : V B : I C : III D : I I : II et III

1.6
1) $S(4\,;4\,;5)$ $A(3\,;-1\,;3)$ $B(5\,;5\,;1)$ $C(1\,;4\,;2)$
2) $\vec{\delta} = 3\,\vec{e_1} + 2\,\vec{e_2} + \vec{e_3}$

1.7
1) $A(2\,;-2\,;2)$ $B(3\,;0\,;1)$ $C(1\,;1\,;3)$ $D(-4\,;0\,;1)$ $E(-1\,;2\,;-2)$
3) A : V B : I et V C : I D : II et VI E : III

1.8
1) $A(\frac{9}{2}\,;3\,;2)$ $B(\frac{13}{2}\,;7\,;2)$ $C(\frac{5}{2}\,;9\,;2)$ $D(\frac{1}{2}\,;5\ 2)$ $E(\frac{7}{2}\,;6\,;6)$ $F(\frac{7}{2}\,;6\,;-2)$
2) $EF = 8$

1.9
1) $S(2\,;2\,;2)$ $A(3\,;1\,;0)$ $B(-1\,;2\,;1)$ $C(-2\,;-1\,;1)$
2) $\vec{\delta} = 5\,\vec{e_1} + 3\,\vec{e_2} - 2\,\vec{e_3}$
3) A : I et IV B : II C : VI S : I

1.10
2) $\vec{\delta} = 4\,\vec{e_1} - 2\,\vec{e_2} - \vec{e_3}$

1.12
1) $p_1 \leqslant 0,\ p_2 \geqslant 0,\ p_3 \leqslant 0$ 2) $p_1 \leqslant 0,\ p_2 \leqslant 0,\ p_3 \leqslant 0$
3) $p_1 \geqslant 0,\ p_2 \leqslant 0,\ p_3 \geqslant 0$ 4) $p_3 = 0$
5) $p_3 = 0$ 6) $p_1 = 0$

1.13
2) (a) $p_1 = p_3$ (b) $p_1 = -p_3$

1.14
1) $P(2\,;3\,;-1)$ 2) $P(-1\,;4\,;3)$ 3) $P(-2\,;-3\,;2)$