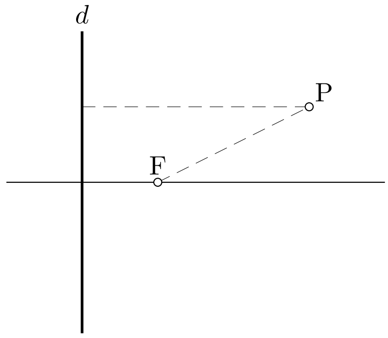
5 Coniques

On donne une droite d, un point F (F $\notin d$) et un nombre réel $e > 0$.

La **conique** de **foyer** F, de **directrice** d et d'**excentricité** e est le lieu géométrique des points P du plan dont le rapport des distances au point F et à la droite d est constant et égal à e.



$$\boxed{\frac{\mathrm{PF}}{\delta(\mathrm{P}\,;d)} = e}$$

La perpendiculaire à la directrice d passant par le foyer F est appelée **axe focal** ; elle constitue un axe de symétrie orthogonale de la conique.

On pose $r = \delta(\mathrm{F}\,;d)$.

On appelle **demi-paramètre** de la conique le nombre $p = e\,r$.

5.1 Choisissons un repère orthonormé $\mathcal{R}$ où le foyer F est pris pour origine et où l'axe des abscisses est l'axe focal.

1) Avec ce choix de repère, quelles sont les coordonnées du foyer F et quelle est l'équation de la directrice d ?
2) Soit $\mathrm{P}(x\,;y)$ un point du plan. Calculer les distances PF et $\delta(\mathrm{P}\,;d)$.
3) Déduire de la formule $\frac{\mathrm{PF}}{\delta(\mathrm{P}\,;d)} = e$ l'équation de la conique :

$$\boxed{(1-e^2)\,x^2 + y^2 - 2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = 0}\,.$$

5.2 On appelle **sommet** d'une conique Γ tout point d'intersection de Γ avec un axe de symétrie orthogonale de Γ.

1) Avec le même choix de repère qu'à l'exercice 5.1, quelle est l'équation de l'axe focal ?
2) Déterminer les sommets situés sur l'axe focal de la conique d'équation $(1-e^2)\,x^2 + y^2 - 2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = 0$, en prenant soin de distinguer les cas où $e = 1$ et $e \neq 1$.

Parabole ($e = 1$)

On suppose $e = 1$.

5.3 1) Vérifier que l'équation $(1-e^2)\,x^2 + y^2 - 2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = 0$ de la conique devient $y^2 = 2\,p\,x + p^2$.

2) On définit un nouveau repère $\mathcal{R}^\star$ par les relations $\begin{cases} x^\star = x + \frac{p}{2} \\ y^\star = y \end{cases}$.

Vérifier que, dans le repère $\mathcal{R}^\star$, l'équation de la conique s'écrit $\boxed{y^{\star 2} = 2\,p\,x^\star}$.

Ainsi, lorsque $e = 1$, la conique est une **parabole**.

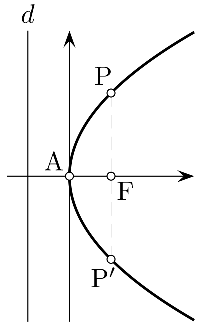
3) Déterminer dans le repère $\mathcal{R}^\star$:

(a) les coordonnées du sommet A ;

(b) les coordonnées du foyer F ;

(c) l'équation de la directrice d ;

(d) les coordonnées des points P et P′.



Remarque : la parabole se situe tout entière dans le demi-plan $x^\star \geqslant 0$; on dit qu'elle est « ouverte à droite ».

5.4 Déterminer le demi-paramètre, le foyer, la directrice et le sommet des paraboles suivantes, avant de les représenter graphiquement.

1) $y^2 = 8\,x$ 2) $(y-2)^2 = 8\,(x-3)$ 3) $(y-2)^2 = -8\,(x-3)$

4) $x^2 = 8\,y$ 5) $(x-3)^2 = 8\,(y-2)$ 6) $(x-3)^2 = -8\,(y-2)$

5.5 Déterminer l'équation d'une parabole de sommet A, dont la directrice est parallèle à l'axe Oy, sachant que :

1) $p = 6$ A$(3\,;4)$ le foyer est à droite de A

2) $p = 4$ A$(2\,;-3)$ le foyer est à gauche de A

5.6 Déterminer l'équation d'une parabole de sommet A, dont la directrice est parallèle à l'axe Ox, sachant que :

1) $p = 3$ A$(3\,;-2)$ le foyer est au-dessus de A

2) $p = 6$ A$(-\frac{7}{3}\,;\frac{5}{2})$ le foyer est au-dessous de A

5.7 On donne une parabole par son équation. Écrire son équation canonique ; déterminer son paramètre, son sommet, son foyer et sa directrice.

1) $y^2 + 2\,x = 0$ 2) $y^2 - 6\,x + 9 = 0$

3) $y^2 - 8\,x + 6\,y + 17 = 0$ 4) $x^2 = 7 + 8\,y - 6\,x$

5) $y^2 - 4\,(x-y) + 8 = 0$ 6) $y = 3\,x^2 + 4\,x + 5$

5.8 Déterminer l'équation d'une parabole dont on donne :

1) la directrice d'équation $x + 1 = 0$ et le foyer $(1\,;0)$;

2) la directrice d'équation $x - 2 = 0$ et le foyer $(5\,;3)$;

3) la directrice d'équation $y + 4 = 0$ et le sommet $(0\,;0)$;

4) la directrice d'équation $x - 8 = 0$ et le sommet $(2\,;-1)$.

5.9 Trouver l'équation de la parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des ordonnées et qui passe par les points A$(6\,;2)$, B$(-6\,;-2)$ et C$(-2\,;0)$.

Coniques à centre ($e \neq 1$)

On suppose $e \neq 1$.

5.10 1) Montrer que l'équation $(1-e^2)\,x^2+y^2-2\,e^2\,r\,x-e^2\,r^2=0$ de la conique peut aussi s'écrire $\left(x-\frac{e^2\,r}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}-\frac{e^2\,r^2}{(1-e^2)^2}=0\,.$

2) On définit un nouveau repère $\mathcal{R}^\star$ par les relations $\begin{cases} x^\star = x-\frac{e^2\,r}{1-e^2} \\ y^\star = y \end{cases}.$

Vérifier que dans le repère $\mathcal{R}^\star$, l'équation de la conique devient : $x^{\star 2}+\frac{y^{\star 2}}{1-e^2}-\frac{e^2\,r^2}{(1-e^2)^2}=0\,.$

L'équation $x^{\star 2}+\frac{y^{\star 2}}{1-e^2}-\frac{e^2\,r^2}{(1-e^2)^2}=0$ montre que si le point $\mathrm{P}(x^\star\,;y^\star)$ appartient à la conique, alors les points de coordonnées $(-x^\star\,;-y^\star)$, $(-x^\star\,;y^\star)$ et $(x^\star\,;-y^\star)$ appartiennent aussi à la conique.

On a ainsi démontré que, si $e \neq 1$, la conique admet
- un centre de symétrie : il s'agit du milieu des sommets A et A′ situés sur l'axe focal;
- deux axes de symétrie orthogonale : l'axe focal et la perpendiculaire à l'axe focal passant par le centre.

On déduit de ce qui précède que les coniques à centre admettent un second foyer F′ et une seconde directrice d', symétriques, par rapport au centre, du foyer F et de la directrice d.

5.11 **Équation réduite d'une conique à centre**

1) Montrer que l'équation $x^{\star 2}+\frac{y^{\star 2}}{1-e^2}-\frac{e^2\,r^2}{(1-e^2)^2}=0$ d'une conique à centre peut aussi s'écrire sous la forme $\dfrac{x^{\star 2}}{\frac{e^2\,r^2}{(1-e^2)^2}}+\dfrac{y^{\star 2}}{\frac{e^2\,r^2}{1-e^2}}-1=0\,.$

2) Déterminer, dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini à l'exercice 5.10, les coordonnées du centre O de la conique, de son foyer F et de son sommet A situé sur l'axe focal.

3) On appelle $a=\delta(\mathrm{O}\,;\mathrm{A})=\left|\frac{e\,r}{1-e^2}\right|$ le **demi-axe focal** et $c=\delta(\mathrm{O}\,;\mathrm{F})=\left|\frac{e^2\,r}{1-e^2}\right|$ la **demi-distance focale**.

Vérifier les égalités suivantes :

(a) $\boxed{e=\dfrac{c}{a}}$

(b) $\frac{e^2\,r^2}{(1-e^2)^2}=a^2$

(c) $\frac{e^2\,r^2}{1-e^2}=a^2-c^2$

de sorte que l'on obtient l'équation réduite d'une conique à centre rapportée à ses axes de symétrie : $\boxed{\dfrac{x^{\star 2}}{a^2}+\dfrac{y^{\star 2}}{a^2-c^2}=1}$

5.12 Montrer que, dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini à l'exercice 5.10, les directrices d'une conique à centre admettent pour équation $\boxed{x^\star = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{a}{e}}$.

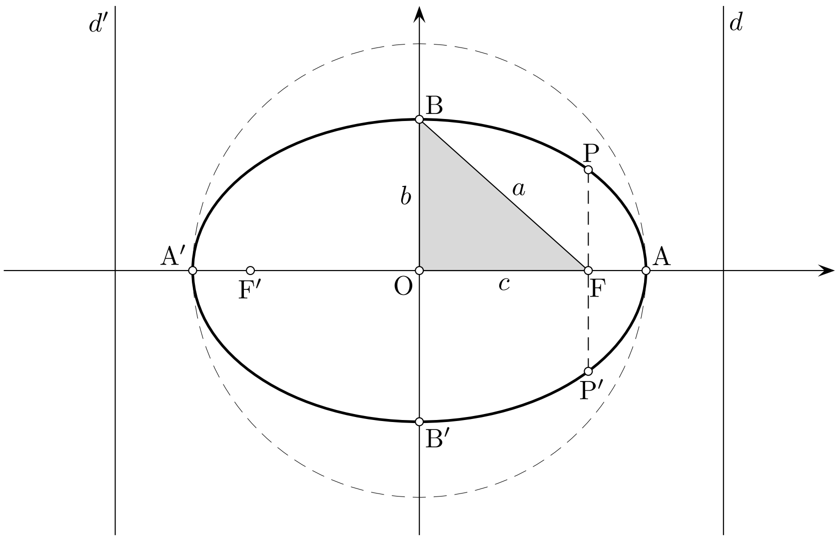
Ellipse $(e < 1)$

On suppose $e < 1$.
La formule $e = \dfrac{c}{a}$ entraîne $c < a$, si bien que $a^2 - c^2 > 0$.
On peut donc poser $b^2 = a^2 - c^2$, en choisissant $b > 0$.

Lorsque $e < 1$, l'équation réduite de la conique devient $\boxed{\dfrac{x^{\star 2}}{a^2} + \dfrac{y^{\star 2}}{b^2} = 1}$.

5.13 Montrer qu'un point $(x\,;y)$ appartient au cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ si et seulement si le point $(x\,;\frac{b}{a}\,y)$ appartient à l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

L'égalité $b^2 = a^2 - c^2$ implique $b < a$, si bien que $\frac{b}{a} < 1$. L'exercice 5.13 montre que l'ellipse est l'image du cercle centré à l'origine et de rayon a par une contraction de rapport $\frac{b}{a}$ des ordonnées relatives à l'axe des abscisses.



L'ellipse coupe l'axe Oy aux sommets B$(0\,;b)$ et B′$(0\,;-b)$. On appelle BB′ le **petit axe** de l'ellipse, alors que AA′ est son **grand axe**. Par abus de langage, on appelle b le **demi-petit axe**, alors que a est le **demi-grand axe**.

5.14 Montrer que le demi-paramètre vérifie la formule $p = \dfrac{b^2}{a}$.
Calculer les coordonnées des points P et P′.

5.15 Déterminer le demi-grand axe, le demi-petit axe, la demi-distance focale, les sommets, les foyers, le paramètre, l'excentricité et les directrices des ellipses suivantes, avant de les représenter graphiquement.

1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 2) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 4) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$

5.16 On donne une ellipse par son équation. Écrire son équation canonique ; déterminer ses sommets, ses foyers, son paramètre et son excentricité.

1) $9\,x^2+25\,y^2-225=0$
2) $4\,x^2+3\,y^2=36$
3) $\dfrac{9\,x^2}{64}+\dfrac{3\,y^2}{16}=1$
4) $x^2+4\,y^2-2\,x-16\,y+1=0$
5) $25\,x^2+9\,y^2+50\,x-18\,y-191=0$
6) $16\,x^2+9\,y^2-32\,x+36\,y-92=0$

5.17 Trouver l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox, sachant que :

1) $b=4 \qquad c=3$ 2) $c=8 \qquad e=\frac{2}{3}$

5.18 Déterminer l'équation de l'ellipse satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Le centre est à l'origine, un foyer est $\mathrm{F}(0\,;6)$ et $e=\frac{1}{2}$.
2) Les foyers sont $\mathrm{F}(0\,;3)$ et $\mathrm{F}'(0\,;-3)$ et le paramètre $2\,p=\frac{32}{5}$.

5.19 Déterminer l'équation d'une ellipse dont on donne :

1) le centre $(6\,;-4)$, un sommet $(10\,;-4)$, l'excentricité $e=\frac{1}{2}$, et sachant que son grand axe est parallèle à l'axe des abscisses ;
2) le centre $(1\,;2)$, un foyer $(6\,;2)$, et sachant qu'elle passe par le point $(4\,;6)$.

5.20 Déterminer l'équation de l'ellipse de centre $\mathrm{C}(0\,;2)$, connaissant son excentricité $e=\frac{1}{2}$ et sachant que l'une des directrices a pour équation $y+6=0$.

5.21 Une ellipse rapportée à ses axes passe par les points $\mathrm{M}(-4\,;3)$ et $\mathrm{N}(2\sqrt{6}\,;\sqrt{6})$.

1) Trouver son équation, ses sommets, ses foyers.
2) Déterminer les points P de l'ellipse tels que PF est perpendiculaire à PF$'$, F et F$'$ désignant les foyers.

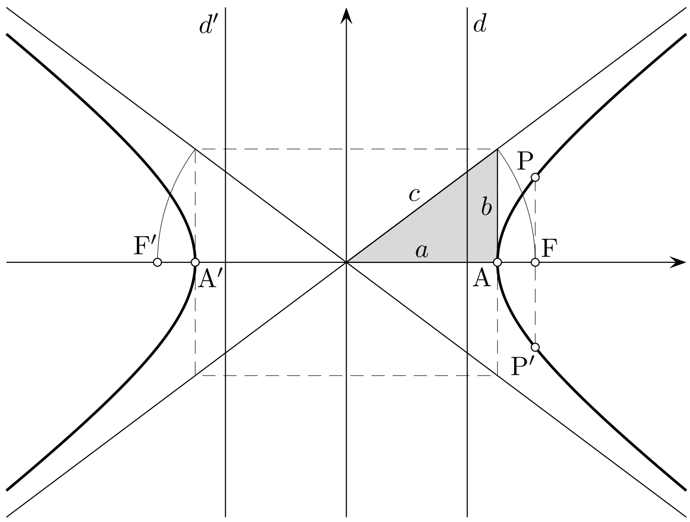
Hyperbole ($e > 1$)

On suppose $e > 1$.
La formule $e = \dfrac{c}{a}$ établie à l'exercice 5.11 entraîne $c > a$, si bien que $c^2 - a^2 > 0$.
On peut donc poser $b^2 = c^2 - a^2$, en choisissant $b > 0$.
Lorsque $e > 1$, l'équation réduite de la conique obtenue à l'exercice 5.11 devient $\boxed{\dfrac{x^{\star 2}}{a^2} - \dfrac{y^{\star 2}}{b^2} = 1}$.

5.22 1) Vérifier que l'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ implique $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

2) Étudier la fonction $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
(domaine de définition, parité, signe, asymptotes)

Cette étude de fonction permet de représenter l'hyperbole.



Remarque : lorsque $a = b$, l'hyperbole est dite **équilatère** ; les asymptotes sont alors perpendiculaires.

5.23 Montrer que le demi-paramètre vérifie la formule $p = \dfrac{b^2}{a}$.
Calculer les coordonnées des points P et P′.

5.24 Déterminer les sommets, les foyers, les asymptotes, le paramètre, l'excentricité et les directrices des hyperboles suivantes, avant de les représenter graphiquement.

1) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

2) $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

3) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

4) $\dfrac{(y-1)^2}{9} - \dfrac{(x-2)^2}{16} = 1$

5.25 On donne une hyperbole par son équation. Écrire son équation canonique ; déterminer ses sommets, ses foyers, ses asymptotes, son paramètre et son excentricité.

1) $9\,x^2 - 16\,y^2 = 144$ 2) $4\,x^2 - 9\,y^2 - 36 = 0$

3) $5\,x^2 - 4\,y^2 - 20\,x - 24\,y + 4 = 0$ 4) $4\,y^2 = x^2 + 2\,x + 8\,y$

5) $25\,x^2 - 9\,y^2 + 50\,x + 54\,y + 169 = 0$ 6) $8\,x^2 - 6\,y^2 + 16\,x - 32 = 0$

5.26 Trouver l'équation de l'hyperbole qui a son centre à l'origine et dont les foyers sont sur l'axe des abscisses, sachant que :

1) $a = 3 \qquad p = 5$ 2) $c = 8 \qquad e = 4$

5.27 Établir l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine dont les foyers sont sur l'axe des ordonnées, connaissant le paramètre $2\,p = 16$ et l'excentricité $e = 5$.

5.28 Trouver l'équation de l'hyperbole de foyers $\mathrm{F}(3\,;0)$ et $\mathrm{F}'(-3\,;0)$, si :

1) les asymptotes ont pour équations $y = \pm 2\,x$;
2) la courbe passe par le point $(4\,;1)$.

5.29 Trouver l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine, de demi-axe $a = 4$ et dont une directrice a pour équation $y = \frac{16}{5}$.

Tangentes

5.30
1) En considérant y comme une fonction implicite de x et en dérivant l'équation $y^2 = 2\,p\,x$, montrer que $y' = \frac{p}{y}$.
2) En déduire que la tangente à la parabole $\Gamma : y^2 = 2\,p\,x$ en $\mathrm{P}_1(x_1\,;y_1) \in \Gamma$ admet l'équation $y = \frac{p}{y_1}\,(x - x_1) + y_1$ ou encore $\boxed{y_1\,y = p\,x + p\,x_1}$.

5.31
1) En considérant y comme une fonction implicite de x et en dérivant l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, montrer que $y' = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y}$.
2) En déduire que la tangente à l'ellipse $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en $\mathrm{P}_1(x_1\,;y_1) \in \Gamma$ admet l'équation $y = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1) + y_1$ ou encore $\boxed{\dfrac{x_1\,x}{a^2} + \dfrac{y_1\,y}{b^2} = 1}$.

5.32
1) En considérant y comme une fonction implicite de x et en dérivant l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, montrer que $y' = \frac{b^2\,x}{a^2\,y}$.

2) En déduire que la tangente à l'hyperbole $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en $P_1(x_1\,;y_1) \in \Gamma$ admet l'équation $y = \frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1) + y_1$ ou encore $\boxed{\dfrac{x_1\,x}{a^2} - \dfrac{y_1\,y}{b^2} = 1}$.

Soit T un point d'une conique Γ ; la perpendiculaire menée par T à la tangente à Γ en T est appelée **normale** à Γ en T.

5.33 Vérifier que le point P appartient à la conique Γ, puis trouver l'équation de la tangente t et de la normale n à Γ en P.

1) $\Gamma : 3\,x^2 - 10\,y^2 = 17$	$P(3\,;1)$
2) $\Gamma : y^2 = 4\,x$	$P(9\,;-6)$
3) $\Gamma : x^2 + 5\,y^2 - 14 = 0$	$P(-3\,;1)$
4) $\Gamma : 25\,x^2 + 4\,y^2 - 100 = 0$	$P(\frac{6}{5}\,;-4)$
5) $\Gamma : x^2 - 8\,x + 5\,y + 2 = 0$	$P(6\,;2)$
6) $\Gamma : x^2 + 4\,y^2 - 6\,x - 16\,y + 20 = 0$	$P(2\,;1)$

5.34

1) Montrer que le calcul de l'intersection de la droite $y = m\,x + h$ avec la parabole $y^2 = 2\,p\,x$ revient à résoudre l'équation
$$m^2\,x^2 + 2\,(h\,m - p)\,x + h^2 = 0$$
2) Pour quelle valeur de h cette équation admet-elle une unique solution ?
3) En déduire que la tangente de pente m à la parabole d'équation $y^2 = 2\,p\,x$ est donnée par la formule $\boxed{y = m\,x + \dfrac{p}{2\,m}}$.

5.35

1) Montrer que le calcul de l'intersection de la droite $y = m\,x + h$ avec l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ revient à résoudre l'équation
$$(a^2\,m^2 + b^2)\,x^2 + 2\,a^2\,h\,m\,x + a^2\,(h^2 - b^2) = 0$$
2) Pour quelle valeur de h cette équation admet-elle une unique solution ?
3) En déduire que les tangentes de pente m à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont données par la formule $\boxed{y = m\,x \pm \sqrt{a^2\,m^2 + b^2}}$.

5.36

1) Montrer que le calcul de l'intersection de la droite $y = m\,x + h$ avec l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ revient à résoudre l'équation
$$(a^2\,m^2 - b^2)\,x^2 + 2\,a^2\,h\,m\,x + a^2\,(h^2 + b^2) = 0$$
2) Pour quelle valeur de h cette équation admet-elle une unique solution ?
3) En déduire que les tangentes de pente m à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont données par la formule $\boxed{y = m\,x \pm \sqrt{a^2\,m^2 - b^2}}$.

5.37 Trouver les équations des tangentes de pente m à la conique Γ.

1) $m = \frac{15}{26}$ $\quad\Gamma : 9\,x^2 - 4\,y^2 + 144 = 0$
2) $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\Gamma : 9\,x^2 + 48\,y^2 - 432 = 0$
3) $m = \frac{4}{9}$ $\quad\Gamma : x^2 + 9\,y^2 - 4\,x + 9\,y = 0$
4) $m = \frac{1}{2}$ $\quad\Gamma : x^2 - 6\,y^2 + 12\,y - 18 = 0$

5.38 Trouver les équations des tangentes à une conique Γ, issues d'un point P.

1) $\Gamma : x^2 + 2\,y^2 - 17 = 0$ $\quad\mathrm{P}(-1\,;5)$
2) $\Gamma : y^2 + 4\,x - 6\,y = 0$ $\quad\mathrm{P}(-\frac{3}{2}\,;-1)$
3) $\Gamma : x^2 - 3\,y^2 + 2\,x + 19 = 0$ $\quad\mathrm{P}(-1\,;2)$

Réponses

5.1 1) $\mathrm{F}(0\,;0)$ $\quad d : x = -r$ $\quad$ 2) $\mathrm{PF} = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad\delta(\mathrm{P}\,;d) = |x + r|$

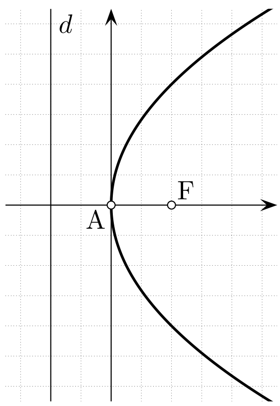
5.2 1) $y = 0$

2) (a) $e = 1$: un sommet $\mathrm{A}(-\frac{r}{2}\,;0)$

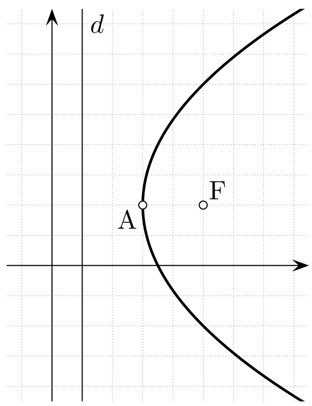
(b) $e \neq 1$: deux sommets $\mathrm{A}(-\frac{e\,r}{e+1}\,;0)$ et $\mathrm{A}'(-\frac{e\,r}{e-1}\,;0)$

5.3 3) (a) $\mathrm{A}(0\,;0)$ $\quad$ (b) $\mathrm{F}(\frac{p}{2}\,;0)$ $\quad$ (c) $d : x^\star = -\frac{p}{2}$ $\quad$ (d) $\mathrm{P}(\frac{p}{2}\,;p)$ $\quad\mathrm{P}'(\frac{p}{2}\,;-p)$

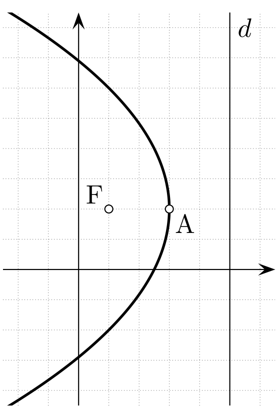
5.4 1) $p = 4$
$\mathrm{F}(2\,;0)$
$x = -2$
$\mathrm{A}(0\,;0)$



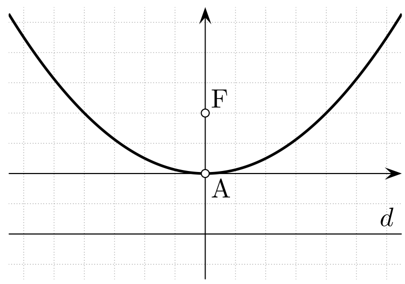
2) $p = 4$
$\mathrm{F}(5\,;2)$
$x = 1$
$\mathrm{A}(3\,;2)$



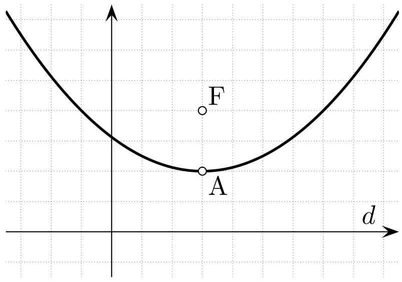
3) $p = 4$
$\mathrm{F}(1\,;2)$
$x = 5$
$\mathrm{A}(3\,;2)$



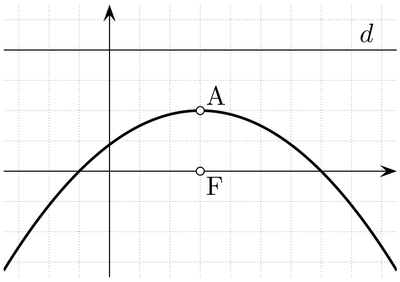
4) $p = 4$ $\quad\mathrm{F}(0\,;2)$
$y = -2$ $\quad\mathrm{A}(0\,;0)$



5) $p = 4$ $\quad$ $\mathrm{F}(3\,;4)$
$y = 0$ $\quad$ $\mathrm{A}(3\,;2)$



6) $p = 4$ $\quad$ $\mathrm{F}(3\,;0)$
$y = 4$ $\quad$ $\mathrm{A}(3\,;2)$



5.5 1) $(y-4)^2 = 12\,(x-3)$ $\qquad$ 2) $(y+3)^2 = -8\,(x-2)$

5.6 1) $(x-3)^2 = 6\,(y+2)$ $\qquad$ 2) $(x+\frac{7}{3})^2 = -12\,(y-\frac{5}{2})$

5.7

1) $y^2 = -2\,x$	$2\,p = 2$	$\mathrm{A}(0\,;0)$	$\mathrm{F}(-\frac{1}{2}\,;0)$	$x = \frac{1}{2}$
2) $y^2 = 6\,(x-\frac{3}{2})$	$2\,p = 6$	$\mathrm{A}(\frac{3}{2}\,;0)$	$\mathrm{F}(3\,;0)$	$x = 0$
3) $(y+3)^2 = 8\,(x-1)$	$2\,p = 8$	$\mathrm{A}(1\,;-3)$	$\mathrm{F}(3\,;-3)$	$x = -1$
4) $(x+3)^2 = 8\,(y+2)$	$2\,p = 8$	$\mathrm{A}(-3\,;-2)$	$\mathrm{F}(-3\,;0)$	$y = -4$
5) $(y+2)^2 = 4\,(x-1)$	$2\,p = 4$	$\mathrm{A}(1\,;-2)$	$\mathrm{F}(2\,;-2)$	$x = 0$
6) $(x+\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{3}\,(y-\frac{11}{3})$	$2\,p = \frac{1}{3}$	$\mathrm{A}(-\frac{2}{3}\,;\frac{11}{3})$	$\mathrm{F}(-\frac{2}{3}\,;\frac{15}{4})$	$y = \frac{43}{12}$

5.8 1) $y^2 = 4\,x$ $\qquad$ 2) $(y-3)^2 = 6\,(x-\frac{7}{2})$

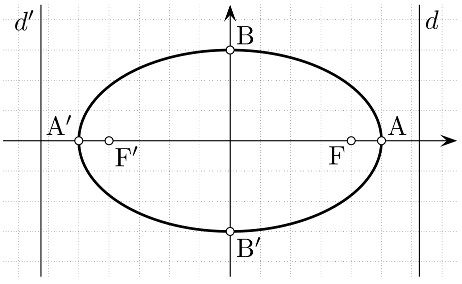
3) $x^2 = 16\,y$ $\qquad$ 4) $(y+1)^2 = -24\,(x-2)$

5.9 $(x-8)^2 = -48\,(y-\frac{25}{12})$

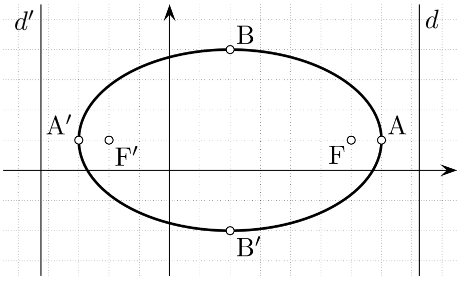
5.11 2) $\mathrm{O}(0\,;0)$ $\qquad$ $\mathrm{F}(-\frac{e^2\,r}{1-e^2}\,;0)$ $\qquad$ $\mathrm{A}(-\frac{e\,r}{1-e^2}\,;0)$

5.14 $\mathrm{P}(c\,;p)$ $\qquad$ $\mathrm{P}'(c\,;-p)$

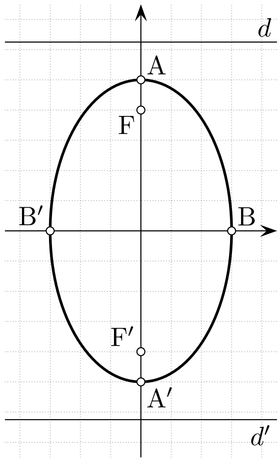
5.15 1) $a = 5$ $\quad$ $b = 3$ $\quad$ $c = 4$
$\mathrm{A}(5\,;0)$ $\quad$ $\mathrm{A}'(-5\,;0)$
$\mathrm{B}(0\,;3)$ $\quad$ $\mathrm{B}'(0\,;-3)$
$\mathrm{F}(4\,;0)$ $\quad$ $\mathrm{F}'(-4\,;0)$
$2\,p = \frac{18}{5}$ $\quad$ $e = \frac{4}{5}$
$d : x = \frac{25}{4}$ $\quad$ $d' : x = -\frac{25}{4}$



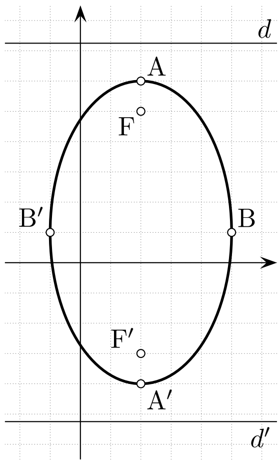
2) $a = 5$ $\quad$ $b = 3$ $\quad$ $c = 4$
$\mathrm{A}(7\,;1)$ $\quad$ $\mathrm{A}'(-3\,;1)$
$\mathrm{B}(2\,;4)$ $\quad$ $\mathrm{B}'(2\,;-2)$
$\mathrm{F}(6\,;1)$ $\quad$ $\mathrm{F}'(-2\,;1)$
$2\,p = \frac{18}{5}$ $\quad$ $e = \frac{4}{5}$
$d : x = \frac{33}{4}$ $\quad$ $d' : x = -\frac{17}{4}$



3) $a=5 \qquad b=3 \qquad c=4$
$\mathrm{A}(0\,;5) \qquad \mathrm{A}'(0\,;-5)$
$\mathrm{B}(3\,;0) \qquad \mathrm{B}'(-3\,;0)$
$\mathrm{F}(0\,;4) \qquad \mathrm{F}'(0\,;-4)$
$2\,p=\frac{18}{5} \qquad e=\frac{4}{5}$
$d: y=\frac{25}{4} \qquad d': y=-\frac{25}{4}$



4) $a=5 \qquad b=3 \qquad c=4$
$\mathrm{A}(2\,;6) \qquad \mathrm{A}'(2\,;-4)$
$\mathrm{B}(5\,;1) \qquad \mathrm{B}'(-1\,;1)$
$\mathrm{F}(2\,;5) \qquad \mathrm{F}'(2\,;-3)$
$2\,p=\frac{18}{5} \qquad e=\frac{4}{5}$
$d: y=\frac{29}{4} \qquad d': y=-\frac{21}{4}$



5.16 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \mathrm{A}(5\,;0) \qquad \mathrm{A}'(-5\,;0) \qquad \mathrm{B}(0\,;3) \qquad \mathrm{B}'(0\,;-3)$
$\mathrm{F}(4\,;0) \qquad \mathrm{F}'(-4\,;0) \qquad 2\,p=\frac{18}{5} \qquad e=\frac{4}{5}$

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1 \qquad \mathrm{A}(0\,;2\sqrt{3}) \qquad \mathrm{A}'(0\,;-2\sqrt{3}) \qquad \mathrm{B}(3\,;0) \qquad \mathrm{B}'(-3\,;0)$
$\mathrm{F}(0\,;\sqrt{3}) \qquad \mathrm{F}'(0\,;-\sqrt{3}) \qquad 2\,p=3\sqrt{3} \qquad e=\frac{1}{2}$

3) $\dfrac{x^2}{\frac{64}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1 \qquad \mathrm{A}(\frac{8}{3}\,;0) \qquad \mathrm{A}'(-\frac{8}{3}\,;0) \qquad \mathrm{B}(0\,;\frac{4\sqrt{3}}{3}) \qquad \mathrm{B}'(0\,;-\frac{4\sqrt{3}}{3})$
$\mathrm{F}(\frac{4}{3}\,;0) \qquad \mathrm{F}'(-\frac{4}{3}\,;0) \qquad 2\,p=4 \qquad e=\frac{1}{2}$

4) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \qquad \mathrm{A}(5\,;2) \qquad \mathrm{A}'(-3\,;2) \qquad \mathrm{B}(1\,;4) \qquad \mathrm{B}'(1\,;0)$
$\mathrm{F}(1+2\sqrt{3}\,;2) \qquad \mathrm{F}'(1-2\sqrt{3}\,;2) \qquad 2\,p=2 \qquad e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1 \qquad \mathrm{A}(-1\,;6) \qquad \mathrm{A}'(-1\,;-4) \qquad \mathrm{B}(2\,;1) \qquad \mathrm{B}'(-4\,;1)$
$\mathrm{F}(-1\,;5) \qquad \mathrm{F}'(-1\,;-3) \qquad 2\,p=\frac{18}{5} \qquad e=\frac{4}{5}$

6) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1 \qquad \mathrm{A}(1\,;2) \qquad \mathrm{A}'(1\,;-6) \qquad \mathrm{B}(4\,;-2) \qquad \mathrm{B}'(-2\,;-2)$
$\mathrm{F}(1\,;-2+\sqrt{7}) \qquad \mathrm{F}'(1\,;-2-\sqrt{7}) \qquad 2\,p=\frac{9}{2} \qquad e=\frac{\sqrt{7}}{4}$

5.17 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$

5.18 1) $\frac{x^2}{108}+\frac{y^2}{144}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

5.19 1) $\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{12}=1$ 2) $\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$

5.20 $\frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

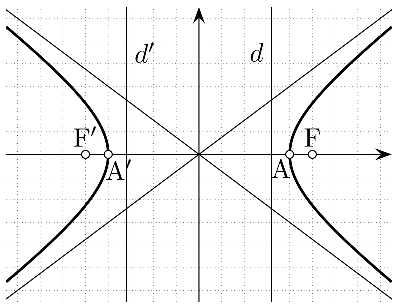
5.21 1) $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$ $\mathrm{A}(2\sqrt{10}\,;0)$ $\mathrm{A}'(-2\sqrt{10}\,;0)$ $\mathrm{B}(0\,;\sqrt{15})$ $\mathrm{B}'(0\,;-\sqrt{15})$
$\mathrm{F}(5\,;0)$ $\mathrm{F}'(-5\,;0)$

2) $\mathrm{P}_1(4\,;3)$ $\mathrm{P}_2(4\,;-3)$ $\mathrm{P}_3(-4\,;3)$ $\mathrm{P}_4(-4\,;-3)$

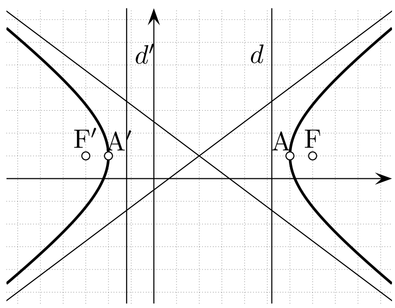
5.22 2) $\mathrm{D}_f=\,]-\infty\,;-a]\cup[a\,;+\infty[$
f est paire
$y=-\frac{b}{a}\,x$ asymptote oblique à gauche
$y=\frac{b}{a}\,x$ asymptote oblique à droite

5.23 $\mathrm{P}(c\,;p)$ $\mathrm{P}'(c\,;-p)$

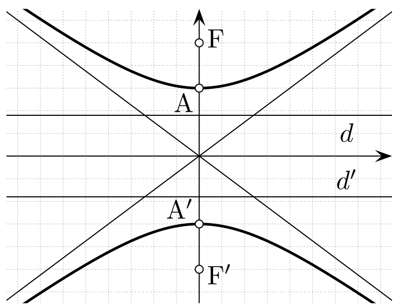
5.24 1) $a=4$ $b=3$ $c=5$
$\mathrm{A}(4\,;0)$ $\mathrm{A}'(-4\,;0)$
$\mathrm{F}(5\,;0)$ $\mathrm{F}'(-5\,;0)$
$y=\frac{3}{4}\,x$ $y=-\frac{3}{4}\,x$
$2\,p=\frac{9}{2}$ $e=\frac{5}{4}$
$d: x=\frac{16}{5}$ $d': x=-\frac{16}{5}$



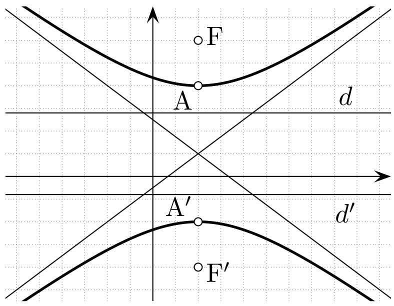
2) $a=4$ $b=3$ $c=5$
$\mathrm{A}(6\,;1)$ $\mathrm{A}'(-2\,;1)$
$\mathrm{F}(7\,;1)$ $\mathrm{F}'(-3\,;1)$
$y=\frac{3}{4}\,x-\frac{1}{2}$ $y=-\frac{3}{4}\,x+\frac{5}{2}$
$2\,p=\frac{9}{2}$ $e=\frac{5}{4}$
$d: x=\frac{26}{5}$ $d': x=-\frac{6}{5}$



3) $a=3$ $b=4$ $c=5$
$\mathrm{A}(0\,;3)$ $\mathrm{A}'(0\,;-3)$
$\mathrm{F}(0\,;5)$ $\mathrm{F}'(0\,;-5)$
$y=\frac{3}{4}\,x$ $y=-\frac{3}{4}\,x$
$2\,p=\frac{32}{3}$ $e=\frac{5}{3}$
$d: y=\frac{9}{5}$ $d': y=-\frac{9}{5}$



4) $a = 3$ $\quad b = 4$ $\quad c = 5$
$\mathrm{A}(2\,;4)$ $\quad \mathrm{A}'(2\,;-2)$
$\mathrm{F}(2\,;6)$ $\quad \mathrm{F}'(2\,;-4)$
$y = \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2}$ $\quad y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{5}{2}$
$2\,p = \frac{32}{3}$ $\quad e = \frac{5}{3}$
$d : y = \frac{14}{5}$ $\quad d' : y = -\frac{4}{5}$



5.25
1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad \mathrm{A}(4\,;0)$ $\quad \mathrm{A}'(-4\,;0)$ $\quad \mathrm{F}(5\,;0)$ $\quad \mathrm{F}'(-5\,;0)$
$y = \frac{3}{4}\,x$ $\quad y = -\frac{3}{4}\,x$ $\quad 2\,p = \frac{9}{2}$ $\quad e = \frac{5}{4}$
2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ $\quad \mathrm{A}(3\,;0)$ $\quad \mathrm{A}'(-3\,;0)$ $\quad \mathrm{F}(\sqrt{13}\,;0)$ $\quad \mathrm{F}'(-\sqrt{13}\,;0)$
$y = \frac{2}{3}\,x$ $\quad y = -\frac{2}{3}\,x$ $\quad 2\,p = \frac{8}{3}$ $\quad e = \frac{\sqrt{13}}{3}$
3) $\frac{(y+3)^2}{5} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ $\quad \mathrm{A}(2\,;-3+\sqrt{5})$ $\quad \mathrm{A}'(2\,;-3-\sqrt{5})$ $\quad \mathrm{F}(2\,;0)$ $\quad \mathrm{F}'(2\,;-6)$
$y + 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}\,(x-2)$ $\quad y + 3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,(x-2)$ $\quad 2\,p = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ $\quad e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$
4) $\frac{(y-1)^2}{\frac{3}{4}} - \frac{(x+1)^2}{3} = 1$ $\quad \mathrm{A}(-1\,;1+\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\quad \mathrm{A}'(-1\,;1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\quad \mathrm{F}(-1\,;1+\frac{\sqrt{15}}{2})$
$\mathrm{F}'(-1\,;1-\frac{\sqrt{15}}{2})$ $\quad y - 1 = \frac{1}{2}\,(x+1)$ $\quad y - 1 = -\frac{1}{2}\,(x+1)$ $\quad 2\,p = 4\sqrt{3}$
$e = \sqrt{5}$
5) $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$ $\quad \mathrm{A}(-1\,;8)$ $\quad \mathrm{A}'(-1\,;-2)$ $\quad \mathrm{F}(-1\,;3+\sqrt{34})$
$\mathrm{F}'(-1\,;3-\sqrt{34})$ $\quad y-3 = \frac{5}{3}\,(x+1)$ $\quad y-3 = -\frac{5}{3}\,(x+1)$ $\quad 2\,p = \frac{18}{5}$ $\quad e = \frac{\sqrt{34}}{5}$
6) $\frac{(x+1)^2}{5} - \frac{y^2}{\frac{20}{3}} = 1$ $\quad \mathrm{A}(-1+\sqrt{5}\,;0)$ $\quad \mathrm{A}'(-1-\sqrt{5}\,;0)$ $\quad \mathrm{F}(-1+\frac{\sqrt{105}}{3}\,;0)$
$\mathrm{F}'(-1-\frac{\sqrt{105}}{3}\,;0)$ $\quad y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,(x+1)$ $\quad y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,(x+1)$ $\quad 2\,p = \frac{8\sqrt{5}}{3}$ $\quad e = \frac{\sqrt{21}}{3}$

5.26
1) $5\,x^2 - 3\,y^2 - 45 = 0$ ou $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{15} = 1$
2) $15\,x^2 - y^2 - 60 = 0$ ou $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{60} = 1$

5.27 $72\,y^2 - 3\,x^2 - 8 = 0$ ou $\frac{y^2}{\frac{1}{9}} - \frac{x^2}{\frac{8}{3}} = 1$

5.28
1) $20\,x^2 - 5\,y^2 - 36 = 0$ ou $\frac{x^2}{\frac{9}{5}} - \frac{y^2}{\frac{36}{5}} = 1$
2) $x^2 - 8\,y^2 - 8 = 0$ ou $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$

5.29 $9\,y^2 - 16\,x^2 - 144 = 0$ ou $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

5.33
1) $t : 9\,x - 10\,y - 17 = 0$ $\quad n : 10\,x + 9\,y - 39 = 0$
2) $t : x + 3\,y + 9 = 0$ $\quad n : 3\,x - y - 33 = 0$
3) $t : 3\,x - 5\,y + 14 = 0$ $\quad n : 5\,x + 3\,y + 12 = 0$
4) $t : 15\,x - 8\,y - 50 = 0$ $\quad n : 40\,x + 75\,y + 252 = 0$
5) $t : 4\,x + 5\,y - 34 = 0$ $\quad n : 5\,x - 4\,y - 22 = 0$

6) $t : x + 4\,y - 6 = 0$ $\qquad$ $n : 4\,x - y - 7 = 0$

5.34 2) $h = \frac{p}{2\,m}$

5.35 2) $h = \pm\sqrt{a^2\,m^2 + b^2}$

5.36 2) $h = \pm\sqrt{a^2\,m^2 - b^2}$

5.37
1) $15\,x - 26\,y + 144 = 0$ $\qquad$ $15\,x - 26\,y - 144 = 0$
2) $x - \sqrt{3}\,y + 5\,\sqrt{3} = 0$ $\qquad$ $x - \sqrt{3}\,y - 5\,\sqrt{3}$
3) $4\,x - 9\,y - 25 = 0$ $\qquad$ $4\,x - 9\,y = 0$
4) $x - 2\,y = 0$ $\qquad$ $x - 2\,y + 4 = 0$

5.38
1) $3\,x + 4\,y - 17 = 0$ $\qquad$ $11\,x - 8\,y + 51 = 0$
2) $2\,x - 3\,y = 0$ $\qquad$ $2\,x - 5\,y - 2 = 0$
3) $x - 3\,y + 7 = 0$ $\qquad$ $x + 3\,y - 5 = 0$