

5.11

- 1) En divisant l'équation $x^{*2} + \frac{y^{*2}}{1-e^2} - \frac{e^2 r^2}{(1-e^2)^2} = 0$ par $\frac{e^2 r^2}{(1-e^2)^2}$, on obtient :

$$\frac{x^{*2}}{\frac{e^2 r^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^{*2}}{\frac{e^2 r^2}{1-e^2}} - 1 = 0$$

- 2) D'après l'exercice 5.2, dans le repère $\mathcal{R}$, les deux sommets ont pour coordonnées $A(-\frac{er}{e+1}; 0)$ et $A'(-\frac{er}{e-1}; 0)$.

Calculons, dans le repère $\mathcal{R}$, les coordonnées du centre O de la conique, sachant qu'il s'agit du milieu des sommets A et A' :

$$\begin{aligned} O\left(\frac{-\frac{er}{e+1} - \frac{er}{e-1}}{2}; \frac{0+0}{2}\right) &= O\left(-\frac{er}{2}\left(\frac{1}{e+1} + \frac{1}{e-1}\right); 0\right) = \\ O\left(-\frac{er}{2}\left(\frac{(e-1)+(e+1)}{(e+1)(e-1)}\right); 0\right) &= O\left(-\frac{er}{2} \cdot \frac{2e}{e^2-1}; 0\right) = O\left(\frac{e^2 r}{1-e^2}; 0\right) \end{aligned}$$

Rappelons que le foyer F constitue l'origine du repère $\mathcal{R}$, donc $F(0; 0)$.

Transcrivons les coordonnées de ces points depuis le repère $\mathcal{R}$ vers le repère $\mathcal{R}^*$ grâce aux relations

$$\begin{cases} x^* = x - \frac{e^2 r}{1-e^2} \\ y^* = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A^* = x_A - \frac{e^2 r}{1-e^2} = -\frac{er}{e+1} - \frac{e^2 r}{1-e^2} = -\frac{er}{1+e} - \frac{e^2 r}{(1-e)(1+e)} = -\frac{er}{1+e} \left(1 + \frac{e}{1-e}\right) \\ y_A^* = y_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A^* = -\frac{er}{1+e} \cdot \frac{(1-e)+e}{1-e} = -\frac{er}{1+e} \cdot \frac{1}{1-e} = -\frac{er}{1-e^2} \\ y_A^* = 0 \end{cases}$$

On a ainsi obtenu : $A^*\left(-\frac{er}{1-e^2}; 0\right)$.

$$\begin{cases} x_{A'}^* = x_{A'} - \frac{e^2 r}{1-e^2} = -\frac{er}{e-1} - \frac{e^2 r}{1-e^2} = -\frac{er}{e-1} - \frac{e^2 r}{(1-e)(1+e)} = -\frac{er}{1-e} \left(-1 + \frac{e}{1+e}\right) \\ y_{A'}^* = y_{A'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A'}^* = -\frac{er}{1-e} \cdot \frac{-(1+e)+e}{1+e} = -\frac{er}{1-e} \cdot \frac{(-1)}{1+e} = \frac{er}{1-e^2} \\ y_{A'}^* = 0 \end{cases}$$

On a donc trouvé : $A'^*\left(\frac{er}{1-e^2}; 0\right)$.

$$\begin{cases} x_O^* = x_O - \frac{e^2 r}{1-e^2} = \frac{e^2 r}{1-e^2} - \frac{e^2 r}{1-e^2} = 0 \\ y_O^* = y_O = 0 \end{cases}$$

Le centre de la conique est ainsi l'origine du repère $\mathcal{R}^*$: $O^*(0; 0)$.

$$\begin{cases} x_F^* = x_F - \frac{e^2 r}{1-e^2} = 0 - \frac{e^2 r}{1-e^2} = -\frac{e^2 r}{1-e^2} \\ y_F^* = y_F = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que $F^*\left(-\frac{e^2 r}{1-e^2}; 0\right)$

$$3) \quad (a) \quad \frac{c}{a} = \frac{\left| \frac{e^2 r}{1-e^2} \right|}{\left| \frac{e r}{1-e^2} \right|} = \left| \frac{e^2 r}{1-e^2} \cdot \frac{1-e^2}{e r} \right| = |e| = e \quad \text{car } e > 0$$

$$(b) \quad a^2 = \left(\left| \frac{e r}{1-e^2} \right| \right)^2 = \frac{e^2 r^2}{(1-e^2)^2}$$

$$(c) \quad a^2 - c^2 = \frac{e^2 r^2}{(1-e^2)^2} - \left(\left| \frac{e^2 r}{1-e^2} \right| \right)^2 = \frac{e^2 r^2}{(1-e^2)^2} - \frac{e^4 r^2}{(1-e^2)^2} = \frac{e^2 r^2 - e^4 r^2}{(1-e^2)^2} \\ = \frac{e^2 r^2 (1-e^2)}{(1-e^2)^2} = \frac{e^2 r^2}{1-e^2}$$