5.12 Dans le repère $\mathcal{R}$ de l'exercice 5.1 dont l'origine est le foyer F, la directrice a pour équation $d : x = -r$.

Les relations $\begin{cases} x^\star = x - \frac{e^2\,r}{1-e^2} \\ y^\star = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x^\star + \frac{e^2\,r}{1-e^2} \\ y = y^\star \end{cases}$ impliquent :

$d : x = -r \iff x^\star + \frac{e^2\,r}{1-e^2} = -r \iff x^\star = -r - \frac{e^2\,r}{1-e^2} = -\frac{r\,(1-e^2)+e^2\,r}{1-e^2} = -\frac{r}{1-e^2}$

Étant donné que le centre de symétrie de la conique est l'origine du repère $\mathcal{R}^\star$, la seconde directrice a pour équation $x^\star = \frac{r}{1-e^2}$.

En résumé, les directrices de la conique ont pour équation $x^\star = \pm\frac{r}{1-e^2}$.

En outre $\pm\frac{a}{e} = \pm a \cdot \frac{1}{e} = \pm\frac{e\,r}{1-e^2} \cdot \frac{1}{e} = \pm\frac{r}{1-e^2}$.

La formule $e = \frac{c}{a}$ implique $\frac{a}{e} = a \cdot \frac{a}{c} = \frac{a^2}{c}$.

On a finalement montré que, dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les directrices d'une conique à centre admettent pour équations :

$$x^\star = \pm\frac{r}{1-e^2} = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$$