5.15 1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

Le demi-grand axe est $a=5$; le demi-petit axe est $b=3$.

La demi-distance focale vaut $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$.

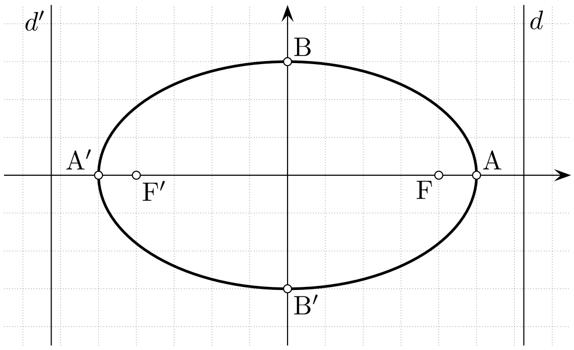
Les sommets sont $\mathrm{A}(a\,;0)=\mathrm{A}(5\,;0)$, $\mathrm{A}'(-a\,;0)=\mathrm{A}'(-5\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;b)=\mathrm{B}(0\,;3)$ et $\mathrm{B}'(0\,;-b)=\mathrm{B}'(0\,;-3)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}(c\,;0)=(4\,;0)$ et $\mathrm{F}'(-c\,;0)=(-4\,;0)$.

Le demi-paramètre est $p=\frac{b^2}{a}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$. Donc le paramètre est $2\,p=\frac{18}{5}$.

L'excentricité vaut $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Les directrices ont pour équations $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{5^2}{4}=\pm\frac{25}{4}$.



2) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=\dfrac{(x-2)^2}{5^2}+\dfrac{(y-1)^2}{3^2}=1$

Le demi-grand axe est $a=5$; le demi-petit axe est $b=3$.

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = x-2 \\ y^\star = y-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x^\star+2 \\ y = y^\star+1 \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{5^2}+\dfrac{y^{\star 2}}{3^2}=1$.

La demi-distance focale vaut $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$.

Les sommets sont $\mathrm{A}^\star(a\,;0)=\mathrm{A}^\star(5\,;0)$, $\mathrm{A}'^\star(-a\,;0)=\mathrm{A}'^\star(-5\,;0)$, $\mathrm{B}^\star(0\,;b)=\mathrm{B}^\star(0\,;3)$ et $\mathrm{B}'^\star(0\,;-b)=\mathrm{B}'^\star(0\,;-3)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}^\star(c\,;0)=(4\,;0)$ et $\mathrm{F}'^\star(-c\,;0)=(-4\,;0)$.

Le demi-paramètre est $p=\frac{b^2}{a}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$. Donc le paramètre est $2\,p=\frac{18}{5}$.

L'excentricité vaut $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Les directrices ont pour équations $x^\star=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{5^2}{4}=\pm\frac{25}{4}$.

Il s'agit maintenant de donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des directrices dans le repère $\mathcal{R}$.

$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}}^\star+2=5+2=7 \\ y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{A}}^\star+1=0+1=1 \end{cases}$ donc $\mathrm{A}(7\,;1)$

$$\begin{cases} x_{A'} = x^\star_{A'} + 2 = -5+2 = -3 \\ y_{A'} = y^\star_{A'} + 1 = 0+1 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } A'(-3\,;1)$$

$$\begin{cases} x_B = x^\star_B + 2 = 0+2 = 2 \\ y_B = y^\star_B + 1 = 3+1 = 4 \end{cases} \quad \text{donc } B(2\,;4)$$

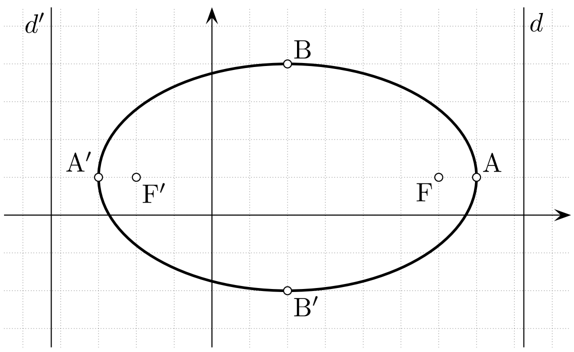
$$\begin{cases} x_{B'} = x^\star_{B'} + 2 = 0+2 = 2 \\ y_{B'} = y^\star_{B'} + 1 = -3+1 = -2 \end{cases} \quad \text{d'où } B'(2\,;-2)$$

$$\begin{cases} x_F = x^\star_F + 2 = 4+2 = 6 \\ y_F = y^\star_F + 1 = 0+1 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } F(6\,;1)$$

$$\begin{cases} x_{F'} = x^\star_{F'} + 2 = -4+2 = -2 \\ y_{F'} = y^\star_{F'} + 1 = 0+1 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } F'(-2\,;1)$$

$d : x^\star = \frac{25}{4} \iff x - 2 = \frac{25}{4} \iff x = \frac{33}{4}$

$d' : x^\star = -\frac{25}{4} \iff x - 2 = -\frac{25}{4} \iff x = -\frac{17}{4}$



3) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$

Le demi-grand axe est $a = 5$; le demi-petit axe est $b = 3$.

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y \\ y^\star = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^\star \\ y = x^\star \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{5^2} + \dfrac{y^{\star 2}}{3^2} = 1$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Les sommets sont $A^\star(a\,;0) = A^\star(5\,;0)$, $A'^\star(-a\,;0) = A'^\star(-5\,;0)$, $B^\star(0\,;b) = B^\star(0\,;3)$ et $B'^\star(0\,;-b) = B'^\star(0\,;-3)$.

Les foyers sont $F^\star(c\,;0) = (4\,;0)$ et $F'^\star(-c\,;0) = (-4\,;0)$.

Le demi-paramètre est $p = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$. Donc le paramètre est $2\,p = \frac{18}{5}$.

L'excentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Les directrices ont pour équations $x^\star = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{5^2}{4} = \pm\frac{25}{4}$.

Il s'agit maintenant de donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des directrices dans le repère $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = y^\star_{\mathrm{A}} = 0 \\ y_{\mathrm{A}} = x^\star_{\mathrm{A}} = 5 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{A}(0\,;5)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}'} = y^\star_{\mathrm{A}'} = 0 \\ y_{\mathrm{A}'} = x^\star_{\mathrm{A}'} = -5 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{A}'(0\,;-5)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = y^\star_{\mathrm{B}} = 3 \\ y_{\mathrm{B}} = x^\star_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{B}(3\,;0)$$

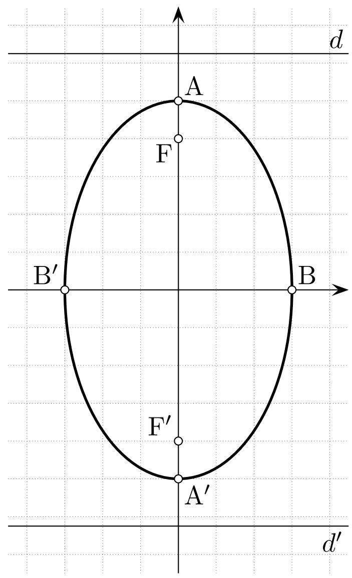
$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}'} = y^\star_{\mathrm{B}'} = -3 \\ y_{\mathrm{B}'} = x^\star_{\mathrm{B}'} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{B}'(-3\,;0)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F}} = y^\star_{\mathrm{F}} = 0 \\ y_{\mathrm{F}} = x^\star_{\mathrm{F}} = 4 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{F}(0\,;4)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F}'} = y^\star_{\mathrm{F}'} = 0 \\ y_{\mathrm{F}'} = x^\star_{\mathrm{F}'} = -4 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{F}'(0\,;-4)$$

$d : x^\star = \frac{25}{4} \iff y = \frac{25}{4}$

$d' : x^\star = -\frac{25}{4} \iff y = -\frac{25}{4}$



4) $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = \dfrac{(x-2)^2}{3^2} + \dfrac{(y-1)^2}{5^2} = 1$

Le demi-grand axe est $a = 5$; le demi-petit axe est $b = 3$.

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y - 1 \\ y^\star = x - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^\star + 2 \\ y = x^\star + 1 \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{5^2} + \dfrac{y^{\star 2}}{3^2} = 1$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Les sommets sont $\mathrm{A}^\star(a\,;0) = \mathrm{A}^\star(5\,;0)$, $\mathrm{A}'^\star(-a\,;0) = \mathrm{A}'^\star(-5\,;0)$, $\mathrm{B}^\star(0\,;b) = \mathrm{B}^\star(0\,;3)$ et $\mathrm{B}'^\star(0\,;-b) = \mathrm{B}'^\star(0\,;-3)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}^{\star}(c\,;0)=(4\,;0)$ et $\mathrm{F}'^{\star}(-c\,;0)=(-4\,;0)$.

Le demi-paramètre est $p=\frac{b^2}{a}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$. Donc le paramètre est $2\,p=\frac{18}{5}$.

L'excentricité vaut $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Les directrices ont pour équations $x^{\star}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{5^2}{4}=\pm\frac{25}{4}$.

Il s'agit maintenant de donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des directrices dans le repère $\mathcal{R}$.

$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}=y^{\star}_{\mathrm{A}}+2=0+2=2 \\ y_{\mathrm{A}}=x^{\star}_{\mathrm{A}}+1=5+1=6 \end{cases}$ donc $\mathrm{A}(2\,;6)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{A}'}=y^{\star}_{\mathrm{A}'}+2=0+2=2 \\ y_{\mathrm{A}'}=x^{\star}_{\mathrm{A}'}+1=-5+1=-4 \end{cases}$ d'où $\mathrm{A}'(2\,;-4)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{B}}=y^{\star}_{\mathrm{B}}+2=3+2=5 \\ y_{\mathrm{B}}=x^{\star}_{\mathrm{B}}+1=0+1=1 \end{cases}$ donc $\mathrm{B}(5\,;1)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{B}'}=y^{\star}_{\mathrm{B}'}+2=-3+2=-1 \\ y_{\mathrm{B}'}=x^{\star}_{\mathrm{B}'}+1=0+1=1 \end{cases}$ d'où $\mathrm{B}'(-1\,;1)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{F}}=y^{\star}_{\mathrm{F}}+2=0+2=2 \\ y_{\mathrm{F}}=x^{\star}_{\mathrm{F}}+1=4+1=5 \end{cases}$ donc $\mathrm{F}(2\,;5)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{F}'}=y^{\star}_{\mathrm{F}'}+2=0+2=2 \\ y_{\mathrm{F}'}=x^{\star}_{\mathrm{F}'}+1=-4+1=-3 \end{cases}$ d'où $\mathrm{F}'(2\,;-3)$

$d:x^{\star}=\frac{25}{4}\iff y-1=\frac{25}{4}\iff y=\frac{29}{4}$

$d':x^{\star}=-\frac{25}{4}\iff y-1=-\frac{25}{4}\iff y=-\frac{21}{4}$