5.16 1) $9\,x^2 + 25\,y^2 - 225 = 0$

$$\frac{9\,x^2}{225} + \frac{25\,y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{225}{9}} + \frac{y^2}{\frac{225}{25}} = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Le demi-grand axe est $a = 5$; le demi-petit axe est $b = 3$.

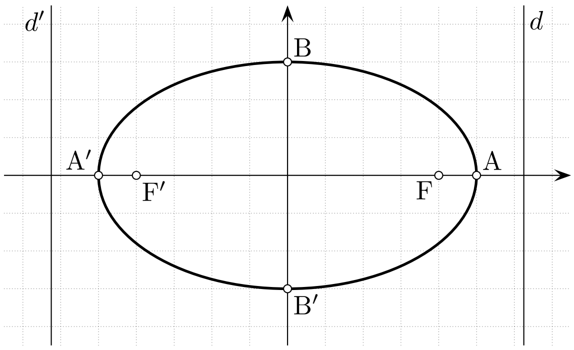
La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Les sommets sont $\mathrm{A}(a\,;0) = \mathrm{A}(5\,;0)$, $\mathrm{A}'(-a\,;0) = \mathrm{A}'(-5\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;b) = \mathrm{B}(0\,;3)$ et $\mathrm{B}'(0\,;-b) = \mathrm{B}'(0\,;-3)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}(c\,;0) = (4\,;0)$ et $\mathrm{F}'(-c\,;0) = (-4\,;0)$.

Le demi-paramètre est $p = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$. Donc le paramètre est $2\,p = \frac{18}{5}$.

L'excentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.



2) $4\,x^2 + 3\,y^2 = 36$

$$\frac{4\,x^2}{36} + \frac{3\,y^2}{36} = \frac{x^2}{\frac{36}{4}} + \frac{y^2}{\frac{36}{3}} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(2\,\sqrt{3})^2} = 1$$

Le demi-grand axe est $a = 2\,\sqrt{3}$. Le demi-petit axe est $b = 3$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12 - 9} = \sqrt{3}$.

Le demi-paramètre est $p = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{2\,\sqrt{3}} = \frac{9}{2\,\sqrt{3}} = \frac{9\,\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{3\,\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent, le paramètre vaut $2\,p = 3\,\sqrt{3}$.

L'excentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\,\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y \\ y^\star = x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y^\star \\ y = x^\star \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{(2\,\sqrt{3})^2} + \dfrac{y^{\star 2}}{3^2} = 1$.

Ses sommets sont $\mathrm{A}^\star(a\,;0) = \mathrm{A}^\star(2\,\sqrt{3}\,;0)$, $\mathrm{A}'^\star(-a\,;0) = \mathrm{A}'^\star(-2\,\sqrt{3}\,;0)$, $\mathrm{B}^\star(0\,;b) = \mathrm{B}^\star(0\,;3)$ et $\mathrm{B}'^\star(0\,;-b) = \mathrm{B}'^\star(0\,;-3)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}^\star(c\,;0) = \mathrm{F}^\star(\sqrt{3}\,;0)$ et $\mathrm{F}'^\star(-c\,;0) = \mathrm{F}'^\star(-\sqrt{3}\,;0)$.

Donnons à présent les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $\mathcal{R}$.

$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = y^\star_{\mathrm{A}} = 0 \\ y_{\mathrm{A}} = x^\star_{\mathrm{A}} = 2\sqrt{3} \end{cases}$ donc $\mathrm{A}(0\,;2\sqrt{3})$

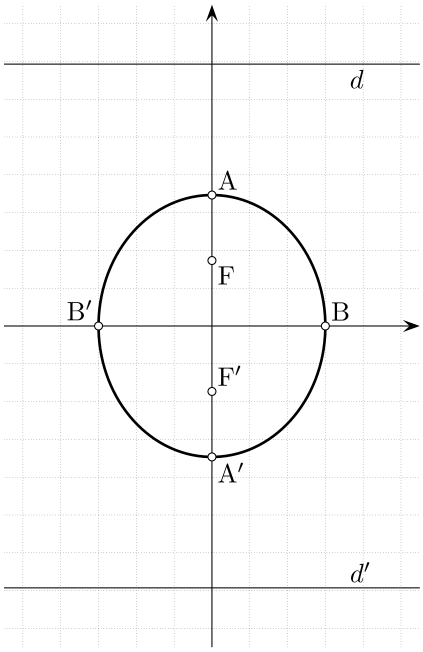
$\begin{cases} x_{\mathrm{A}'} = y^\star_{\mathrm{A}'} = 0 \\ y_{\mathrm{A}'} = x^\star_{\mathrm{A}'} = -2\sqrt{3} \end{cases}$ d'où $\mathrm{A}'(0\,;-2\sqrt{3})$

$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = y^\star_{\mathrm{B}} = 3 \\ y_{\mathrm{B}} = x^\star_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases}$ donc $\mathrm{B}(3\,;0)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{B}'} = y^\star_{\mathrm{B}'} = -3 \\ y_{\mathrm{B}'} = x^\star_{\mathrm{B}'} = 0 \end{cases}$ d'où $\mathrm{B}'(-3\,;0)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{F}} = y^\star_{\mathrm{F}} = 0 \\ y_{\mathrm{F}} = x^\star_{\mathrm{F}} = \sqrt{3} \end{cases}$ donc $\mathrm{F}(0\,;\sqrt{3})$

$\begin{cases} x_{\mathrm{F}'} = y^\star_{\mathrm{F}'} = 0 \\ y_{\mathrm{F}'} = x^\star_{\mathrm{F}'} = -\sqrt{3} \end{cases}$ d'où $\mathrm{F}'(0\,;-\sqrt{3})$



3) $\dfrac{9\,x^2}{64} + \dfrac{3\,y^2}{16} = \dfrac{x^2}{\frac{64}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{16}{3}} = \dfrac{x^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{x^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$

Le demi-grand axe est $a = \frac{8}{3}$ et le demi-petit axe est $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

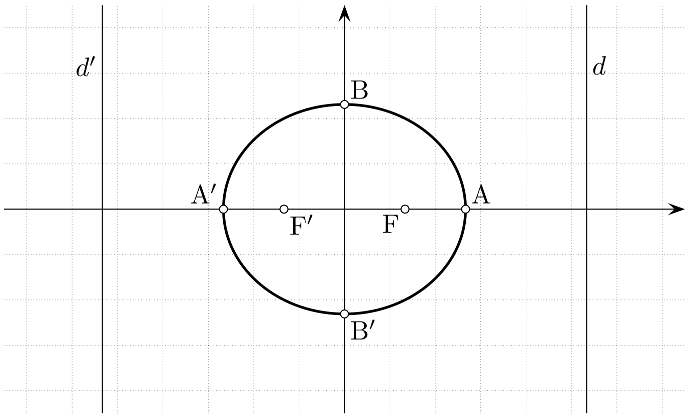
La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$.

Le demi-paramètre est $p = \frac{b^2}{a} = \dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}} = 2$. Le paramètre est ainsi $2\,p = 4$.

L'excentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2}$.

Les sommets sont $A(a\,;0) = A\big(\frac{8}{3}\,;0\big)$, $A'(-a\,;0) = A'\big(-\frac{8}{3}\,;0\big)$, $B(0\,;b) = B\big(0\,;\frac{4\sqrt{3}}{3}\big)$ et $B'(0\,;-b) = B'\big(0\,;-\frac{4\sqrt{3}}{3}\big)$.

Les foyers sont donnés par $F(c\,;0) = F\big(\frac{4}{3}\,;0\big)$ et $F'(-c\,;0) = F'\big(-\frac{4}{3}\,;0\big)$.



4) $x^2 + 4\,y^2 - 2\,x - 16\,y + 1 = 0$

$x^2 - 2\,x + 4\,(y^2 - 4\,y) + 1 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + 4\,\big((y-2)^2 - 4\big) + 1 = 0$

$(x-1)^2 + 4\,(y-2)^2 = 16$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = \frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

Le demi-grand axe est $a = 4$ et le demi-petit axe $b = 2$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Le demi-paramètre est $p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{4} = 1$, si bien que le paramètre vaut $2\,p = 2$.

L'excentricité est donnée par $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = x - 1 \\ y^\star = y - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x^\star + 1 \\ y = y^\star + 2 \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{4^2} + \dfrac{y^{\star 2}}{2^2} = 1$.

Ses sommets sont $A^\star(a\,;0) = A^\star(4\,;0)$, $A'^\star(-a\,;0) = A'^\star(-4\,;0)$, $B^\star(0\,;b) = B^\star(0\,;2)$ et $B'^\star(0\,;-b) = B'^\star(0\,;-2)$.

Les foyers sont $F^\star(c\,;0) = F^\star(2\sqrt{3}\,;0)$ et $F'^\star(-c\,;0) = F'^\star(-2\sqrt{3}\,;0)$.

Donnons à présent les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} x_A = x_A^\star + 1 = 4 + 1 = 5 \\ y_A = y_A^\star + 2 = 0 + 2 = 2 \end{cases} \quad \text{donc } A(5\,;2)$$

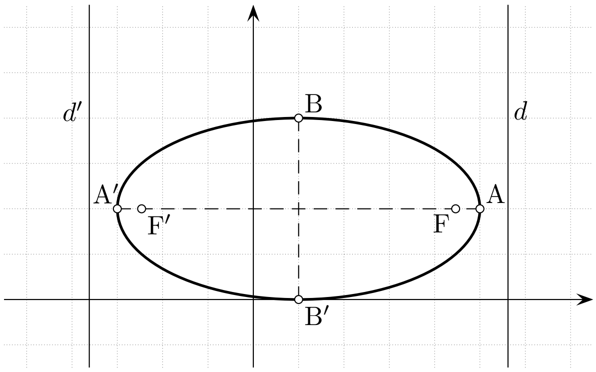
$$\begin{cases} x_{A'} = x_{A'}^\star + 1 = -4 + 1 = -3 \\ y_{A'} = y_{A'}^\star + 2 = 0 + 2 = 2 \end{cases} \quad \text{d'où } A'(-3\,;2)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = x^{\star}_{\mathrm{B}} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ y_{\mathrm{B}} = y^{\star}_{\mathrm{B}} + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{B}(1\,;4)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B'}} = x^{\star}_{\mathrm{B'}} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ y_{\mathrm{B'}} = y^{\star}_{\mathrm{B'}} + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{B'}(1\,;0)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F}} = x^{\star}_{\mathrm{F}} + 1 = 2\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\sqrt{3} \\ y_{\mathrm{F}} = y^{\star}_{\mathrm{F}} + 2 = 0 + 2 = 2 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{F}(1 + 2\sqrt{3}\,;2)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F'}} = x^{\star}_{\mathrm{F'}} + 1 = -2\sqrt{3} + 1 = 1 - 2\sqrt{3} \\ y_{\mathrm{F'}} = y^{\star}_{\mathrm{F'}} + 2 = 0 + 2 = 2 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{F'}(1 - 2\sqrt{3}\,;2)$$



5) $25\,x^2 + 9\,y^2 + 50\,x - 18\,y - 191 = 0$
$25\,(x^2 + 2\,x) + 9\,(y^2 - 2\,y) - 191 = 0$
$25\,\big((x+1)^2 - 1\big) + 9\,\big((y-1)^2 - 1\big) - 191 = 0$
$25\,(x+1)^2 + 9\,(y-1)^2 = 225$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{225}{25}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{225}{9}} = \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = \frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{5^2} = 1$$

Le demi-grand axe est $a = 5$ et le demi-petit axe vaut $b = 3$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Le demi-paramètre est $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{5}$, de sorte que le paramètre est $2\,p = \frac{18}{5}$.

L'excentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Dans le repère $\mathcal{R}^{\star}$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^{\star} = y - 1 \\ y^{\star} = x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^{\star} - 1 \\ y = x^{\star} + 1 \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{5^2} + \dfrac{y^{\star 2}}{3^2} = 1$.

Ses sommets sont $\mathrm{A}^{\star}(a\,;0) = \mathrm{A}^{\star}(5\,;0)$, $\mathrm{A}'^{\star}(-a\,;0) = \mathrm{A}'^{\star}(-5\,;0)$, $\mathrm{B}^{\star}(0\,;b) = \mathrm{B}^{\star}(0\,;3)$ et $\mathrm{B}'^{\star}(0\,;-b) = \mathrm{B}'^{\star}(0\,;-3)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}^{\star}(c\,;0) = \mathrm{F}^{\star}(4\,;0)$ et $\mathrm{F}'^{\star}(-c\,;0) = \mathrm{F}'^{\star}(-4\,;0)$.

Donnons à présent les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = y^{\star}_{\mathrm{A}} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{A}} = x^{\star}_{\mathrm{A}} + 1 = 5 + 1 = 6 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{A}(-1\,;6)$$

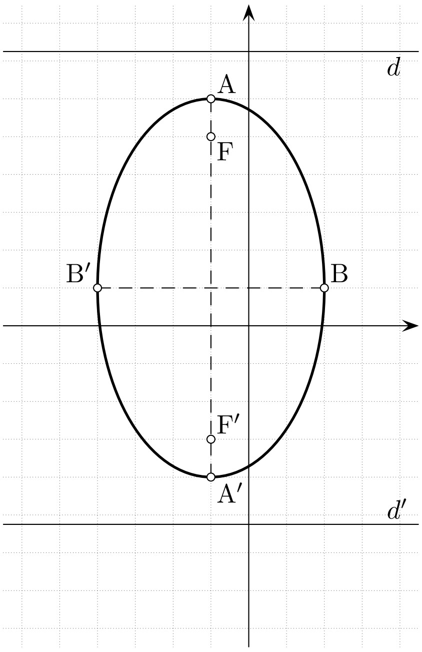
$$\begin{cases} x_{\mathrm{A'}} = y^{\star}_{\mathrm{A'}} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{A'}} = x^{\star}_{\mathrm{A'}} + 1 = -5 + 1 = -4 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{A'}(-1\,;-4)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = y^{\star}_{\mathrm{B}} - 1 = 3 - 1 = 2 \\ y_{\mathrm{B}} = x^{\star}_{\mathrm{B}} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{B}(2\,;1)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B'}} = y^{\star}_{\mathrm{B'}} - 1 = -3 - 1 = -4 \\ y_{\mathrm{B'}} = x^{\star}_{\mathrm{B'}} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{B'}(-4\,;1)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F}} = y^{\star}_{\mathrm{F}} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{F}} = x^{\star}_{\mathrm{F}} + 1 = 4 + 1 = 5 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{F}(-1\,;5)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F'}} = y^{\star}_{\mathrm{F'}} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{F'}} = x^{\star}_{\mathrm{F'}} + 1 = -4 + 1 = -3 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{F'}(-1\,;-3)$$



6) $16\,x^2 + 9\,y^2 - 32\,x + 36\,y - 92 = 0$

$16\,(x^2 - 2\,x) + 9\,(y^2 + 4\,y) - 92 = 0$

$16\,\big((x-1)^2 - 1\big) + 9\,\big((y+2)^2 - 4\big) - 92 = 0$

$16\,(x-1)^2 + 9\,(y+2)^2 = 144$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{144}{16}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{144}{9}} = \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{4^2} = 1$$

Le demi-grand axe est $a = 4$ et le demi-petit axe $b = 3$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Le demi-paramètre est donné par $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$. Donc le paramètre vaut $2\,p = \frac{9}{2}$.

L'excentricité est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Dans le repère $\mathcal{R}^{\star}$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^{\star} = y + 2 \\ y^{\star} = x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^{\star} + 1 \\ y = x^{\star} - 2 \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{4^2} + \dfrac{y^{\star 2}}{3^2} = 1$.

Ses sommets sont $A^\star(a\,;0) = A^\star(4\,;0)$, $A'^\star(-a\,;0) = A'^\star(-4\,;0)$, $B^\star(0\,;b) = B^\star(0\,;3)$ et $B'^\star(0\,;-b) = B'^\star(0\,;-3)$.

Les foyers sont $F^\star(c\,;0) = F^\star(\sqrt{7}\,;0)$ et $F'^\star(-c\,;0) = F'^\star(-\sqrt{7}\,;0)$.

Donnons à présent les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} x_A = y^\star_A + 1 = 0 + 1 = 1 \\ y_A = x^\star_A - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases} \quad \text{donc } A(1\,;2)$$

$$\begin{cases} x_{A'} = y^\star_{A'} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ y_{A'} = x^\star_{A'} - 2 = -4 - 2 = -6 \end{cases} \quad \text{d'où } A'(1\,;-6)$$

$$\begin{cases} x_B = y^\star_B + 1 = 3 + 1 = 4 \\ y_B = x^\star_B - 2 = 0 - 2 = -2 \end{cases} \quad \text{donc } B(4\,;-2)$$

$$\begin{cases} x_{B'} = y^\star_{B'} + 1 = -3 + 1 = -2 \\ y_{B'} = x^\star_{B'} - 2 = 0 - 2 = -2 \end{cases} \quad \text{d'où } B'(-2\,;-2)$$

$$\begin{cases} x_F = y^\star_F + 1 = 0 + 1 = 1 \\ y_F = x^\star_F - 2 = \sqrt{7} - 2 = -2 + \sqrt{7} \end{cases} \quad \text{donc } F(1\,;-2+\sqrt{7})$$

$$\begin{cases} x_{F'} = y^\star_{F'} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ y_{F'} = x^\star_{F'} - 2 = -\sqrt{7} - 2 = -2 - \sqrt{7} \end{cases} \quad \text{d'où } F'(1\,;-2-\sqrt{7})$$