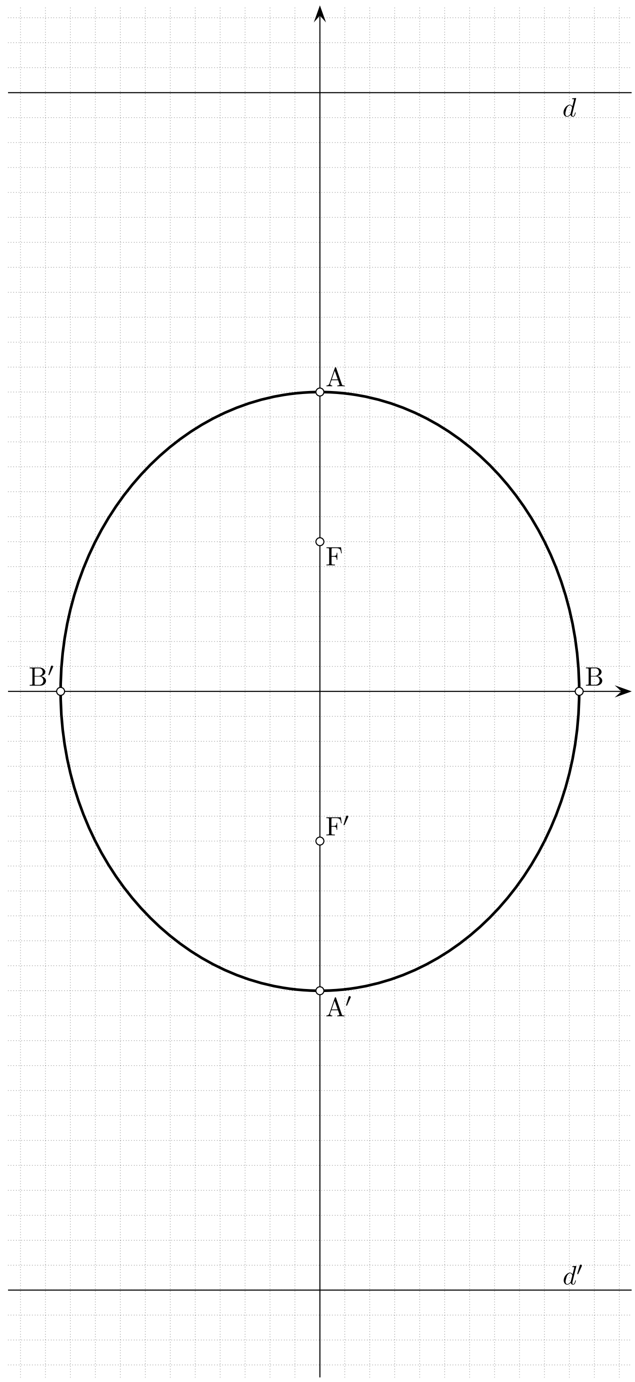
5.18 1) Sachant que le centre est $\mathrm{O}(0\,;0)$ et que le foyer est $\mathrm{F}(0\,;6)$, on en déduit d'une part que l'axe focal est l'axe $\mathrm{O}y$ et d'autre part la demi-distance focale $c = 6$.

La formule $e = \frac{c}{a}$ implique $a = \frac{c}{e} = \dfrac{6}{\frac{1}{2}} = 12$.

Le carré du demi-petit axe vaut $b^2 = a^2 - c^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$.

Par conséquent, l'ellipse a pour équation $\dfrac{x^2}{108} + \dfrac{y^2}{144} = 1$.



2) Le centre de l'ellipse est le milieu des foyers : $\text{O}\big(\frac{0+0}{2}\,;\frac{3+(-3)}{2}\big) = \text{O}(0\,;0)$.
Donc, l'axe focal est l'axe Oy et la demi-distance focale vaut $c = 3$.

Puisque le paramètre est $2\,p = \frac{32}{5}$, le demi-paramètre est $p = \frac{16}{5}$.

Les formules $c^2 = a^2 - b^2$ et $p = \frac{b^2}{a}$ délivrent le système $\begin{cases} 9 = a^2 - b^2 \\ \frac{16}{5} = \frac{b^2}{a} \end{cases}$.

La seconde équation implique $a = \frac{5}{16}\,b^2$ que l'on substitue dans la première équation :

$9 = \left(\frac{5}{16}\,b^2\right)^2 - b^2 = \frac{25}{256}\,b^4 - b^2$

$0 = 25\,b^4 - 256\,b^2 - 2304$

Posons $x = b^2$ et résolvons l'équation $0 = 25\,x^2 - 256\,x - 2304$:

$\Delta = (-256)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-2304) = 295\ 936 = 544^2$

$x_1 = \frac{-(-256)-544}{2\cdot 25} = -\frac{144}{25}$ et $x_2 = \frac{-(-256)+544}{2\cdot 25} = 16$

L'équation $b^2 = -\frac{144}{25}$ est impossible ; en revanche, l'équation $b^2 = 16$ donne $b = \pm 4$. Puisque le demi-petit axe doit être positif, on conclut qu'il vaut $b = 4$.

Par suite, $a = \frac{5}{16}\,b^2 = \frac{5}{16} \cdot 4^2 = 5$.

Finalement, l'équation de l'ellipse est $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.