5.2 1) Puisque l'axe focal est l'axe des abscisses, son équation est $y = 0$.

2) Pour déterminer les sommets de la conique situés sur l'axe focal, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} (1-e^2)\,x^2 + y^2 - 2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La substitution de $y = 0$ dans la première équation donne :

$$(1-e^2)\,x^2 - 2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = 0\,.$$

(a) Si $e = 1$, alors $1 - e^2 = 0$ et on a affaire à une équation du 1er degré :
$-2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = -e^2\,r\,(2\,x + r) = 0$
qui possède une seule solution : $x = -\frac{r}{2}$.
Il n'y a donc qu'un seul sommet : $\mathrm{A}(-\frac{r}{2}\,;0)$.

(b) Si $e \neq 1$, alors $1 - e^2 \neq 0$ et on obtient une équation du 2e degré :
$(1-e^2)\,x^2 - 2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = 0$

Calculons le discriminant :
$\Delta = (-2\,e^2\,r)^2 - 4\,(1-e^2)\,(-e^2\,r^2) = 4\,e^4\,r^2 + 4\,e^2\,r^2 - 4\,e^4\,r^2$
$\quad = 4\,e^2\,r^2 = (2\,e\,r)^2 > 0$

Il y a par conséquent deux solutions :

i. $x_2 = \frac{-(-2\,e^2\,r) - 2\,e\,r}{2\,(1-e^2)} = \frac{2\,e^2\,r - 2\,e\,r}{2\,(1-e^2)} = \frac{2\,e\,r\,(e-1)}{2\,(1-e)\,(1+e)} = -\frac{e\,r}{e+1}$

ii. $x_1 = \frac{-(-2\,e^2\,r) + 2\,e\,r}{2\,(1-e^2)} = \frac{2\,e^2\,r + 2\,e\,r}{2\,(1-e^2)} = \frac{2\,e\,r\,(e+1)}{2\,(1-e)\,(1+e)} = \frac{e\,r}{1-e} = -\frac{e\,r}{e-1}$

Il y a donc deux sommets $\mathrm{A}(-\frac{e\,r}{e+1}\,;0)$ et $\mathrm{A}'(-\frac{e\,r}{e-1}\,;0)$.