5.21 1) L'équation de l'ellipse est de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Comme elle passe par M$(-4\,;3)$, on a $\dfrac{(-4)^2}{a^2}+\dfrac{3^2}{b^2}=\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1$.

Vu qu'elle passe par N$(2\sqrt{6}\,;\sqrt{6})$, on a $\dfrac{(2\sqrt{6})^2}{a^2}+\dfrac{(\sqrt{6})^2}{b^2}=\dfrac{24}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1$.

Résolvons le système

$$\begin{cases}\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{24}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1\end{cases}\iff\begin{cases}16\,b^2+9\,a^2=a^2\,b^2\\ 24\,b^2+6\,a^2=a^2\,b^2\end{cases}$$

La soustraction des deux équations donne $3\,a^2-8\,b^2=0$, de sorte que $b^2=\frac{3}{8}\,a^2$. En effectuant cette substitution dans la première équation, on trouve :

$16\cdot\frac{3}{8}\,a^2+9\,a^2=a^2\cdot\frac{3}{8}\,a^2$

$15\,a^2=\frac{3}{8}\,a^4$

$40\,a^2=a^4$

$0=a^4-40\,a^2=a^2\,(a^2-40)$

Ainsi $a^2=40$ et $b^2=\frac{3}{8}\cdot 40=15$.

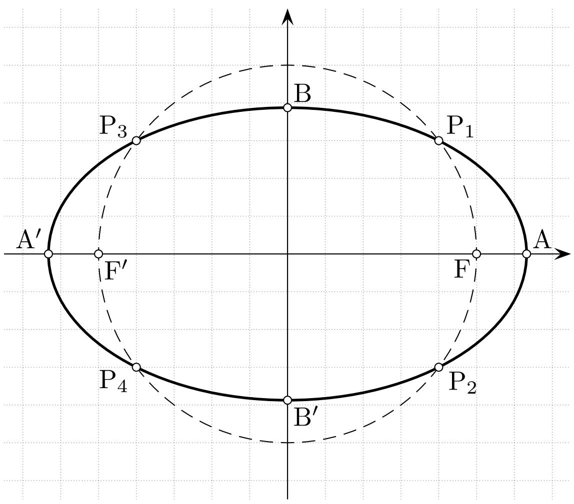
L'équation de l'ellipse est par conséquent $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{15}=1$.

Le carré de la demi-distance focale vaut $c^2=a^2-b^2=40-15=25$.

On a donc $a=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$, $b=\sqrt{15}$ et $c=\sqrt{25}=5$.

Les sommets sont A$(a\,;0)$ = A$(2\sqrt{10}\,;0)$, A$'(-a\,;0)$ = A$'(-2\sqrt{10}\,;0)$, B$(0\,;b)$ = B$(0\,;\sqrt{15})$ et B$'(0\,;-b)$ = B$'(0\,;-\sqrt{15})$.

Les foyers sont F$(c\,;0)$ = F$(5\,;0)$ et F$'(-c\,;0)$ = F$(-5\,;0)$.



2) Soit P$(x\,;y)$ un point du plan.

Pour que P soit situé sur l'ellipse, il faut que ses coordonnées vérifient l'équation de l'ellipse $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{15}=1$.

Pour que PF et PF′ soient perpendiculaires, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PF}'}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire que leur produit scalaire s'annule :

$$0 = \overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}'} = \begin{pmatrix} 5 - x \\ 0 - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 - x \\ 0 - y \end{pmatrix} = (5 - x)\,(-5 - x) + (-y)\,(-y)$$
$$= x^2 + y^2 - 25$$

On remarque qu'on obtient là l'équation du cercle de Thalès de diamètre FF′ .

Il s'agit à présent de résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{15} = 1 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$.

La seconde équation donne $y^2 = 25 - x^2$ que l'on remplace dans la première équation :

$$\frac{x^2}{40} + \frac{25 - x^2}{15} = 1$$
$$3\,x^2 + 8\,(25 - x^2) = 120$$
$$0 = 5\,x^2 - 80 = 5\,(x^2 - 16) = 5\,(x - 4)\,(x - 4)$$

(a) Si $x = 4$, alors $y^2 = 25 - 4^2 = 9$, c'est-à-dire $y = \pm 3$.
On obtient donc les points $\mathrm{P}_1(4\,;3)$ et $\mathrm{P}_2(4\,;-3)$.

(b) Si $x = -4$, alors $y^2 = 25 - (-4)^2 = 9$, à savoir $y = \pm 3$.
On trouve ainsi les points $\mathrm{P}_3(-4\,;3)$ et $\mathrm{P}_4(-4\,;-3)$.