

5.22

$$1) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 - y^2 = b^2$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$2) \text{ (a) } f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \text{ est définie si } x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \geq 0.$$

		$-a$		a		
$x + a$		-	0	+		+
$x - a$		-		-	0	+
$(x + a)(x - a)$		+	0	-	0	+

Par conséquent $D_f =] -\infty; -a] \cup [a; +\infty[$.

$$(b) f(-x) = \frac{b}{a} \sqrt{(-x)^2 - a^2} = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = f(x)$$

La fonction f est ainsi paire, ce qui signifie que l'axe des ordonnées constitue un axe de symétrie du graphe de f .

$$(c) f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in D_f, \text{ car } \sqrt{x} \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0.$$

$$(d) \text{ i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a} |x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a} (-x)}{x} = -\frac{b}{a} = m$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x)(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x)}{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2} x^2}{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-b^2}{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-b^2}{\frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ab}{|x| - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ab}{-x - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ab}{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ab}{2x} = 0 = h \end{aligned}$$

Par conséquent, $y = -\frac{b}{a} x$ est asymptote oblique à gauche.

$$\begin{aligned}
\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} |x|}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} x}{x} = \frac{b}{a} = m \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - m x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x) (\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x)}{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2} x^2}{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-b^2}{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-b^2}{\frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a b}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a b}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a b}{|x| + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a b}{x + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a b}{2x} = 0 = h
\end{aligned}$$

Il en résulte que $y = \frac{b}{a} x$ est asymptote oblique à droite.

(e) On peut à présent représenter le graphe de la fonction f .

