5.25 1) $9\,x^2 - 16\,y^2 = 144$

$$\frac{9\,x^2}{144} - \frac{16\,y^2}{144} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{144}{9}} - \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Le demi axe focal vaut $a = 4$ et $b = 3$.

La demi-distance focale est donnée par $c^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

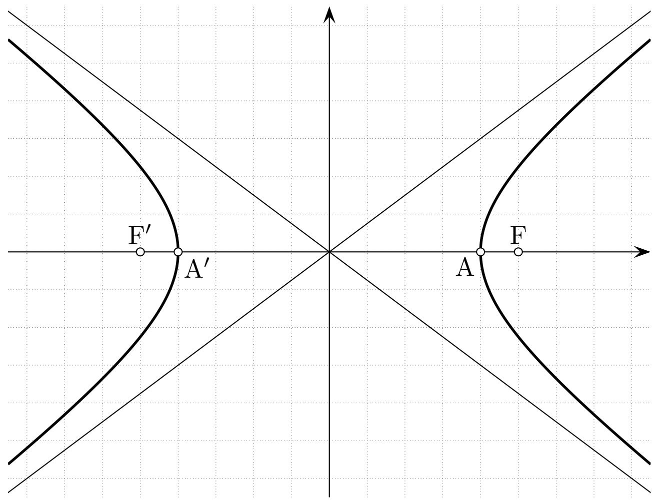
L'excentricité s'obtient par la formule $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

Le demi-paramètre vaut $p = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}$; le paramètre est donc $2\,p = \frac{9}{2}$.

Les sommets sont $\mathrm{A}(a\,;0) = \mathrm{A}(4\,;0)$ et $\mathrm{A}'(-a\,;0) = \mathrm{A}'(-4\,;0)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}(c\,;0) = \mathrm{F}(5\,;0)$ et $\mathrm{F}'(-c\,;0) = \mathrm{F}'(-5\,;0)$.

Les asymptotes ont pour équations $y = \pm\frac{b}{a}\,x = \pm\frac{3}{4}\,x$.



2) $4\,x^2 - 9\,y^2 - 36 = 0$

$$\frac{4\,x^2}{36} - \frac{9\,y^2}{36} = \frac{x^2}{\frac{36}{4}} - \frac{y^2}{\frac{36}{9}} = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Le demi axe focal est $a = 3$ et $b = 2$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

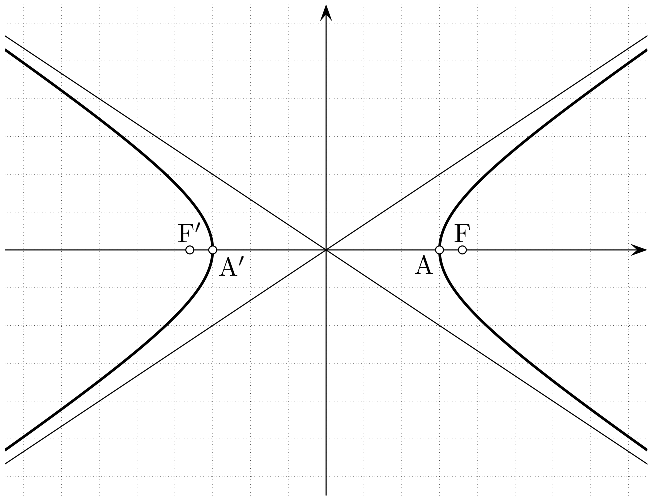
L'excentricité s'obtient par la formule $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Le demi-paramètre est donné par $p = \frac{b^2}{a} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$; le paramètre vaut ainsi $2\,p = \frac{8}{3}$.

Les sommets sont $\mathrm{A}(a\,;0) = \mathrm{A}(3\,;0)$ et $\mathrm{A}'(-a\,;0) = \mathrm{A}'(-3\,;0)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}(c\,;0) = \mathrm{F}(\sqrt{13}\,;0)$ et $\mathrm{F}'(-c\,;0) = \mathrm{F}'(-\sqrt{13}\,;0)$.

Les asymptotes ont pour équations $y = \pm\frac{b}{a}\,x = \pm\frac{2}{3}\,x$.



3) $5\,x^2-4\,y^2-20\,x-24\,y+4=0$

$5\,(x^2-4\,x)-4\,(y^2+6\,y)+4=0$

$5\,\big((x-2)^2-4\big)-4\,\big((y+3)^2-9\big)+4=0$

$5\,(x-2)^2-4\,(y+3)^2=-4+20-36=-20$

$$\frac{4\,(y+3)^2}{20}-\frac{5\,(x-2)^2}{20}=\frac{(y+3)^2}{\frac{20}{4}}-\frac{(x-2)^2}{\frac{20}{4}}=\frac{(y+3)^2}{5}-\frac{(x-2)^2}{4}$$
$$=\frac{(y+3)^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{(x-2)^2}{2^2}=1$$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star=y+3\\ y^\star=x-2\end{cases}\iff\begin{cases} x=y^\star+2\\ y=x^\star-3\end{cases}$$

l'équation de l'hyperbole s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{(\sqrt{5})^2}-\dfrac{y^{\star 2}}{2^2}=1\,.$

Le demi axe focal est $a=\sqrt{5}$ et $b=2\,.$

La demi-distance focale vaut $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3\,.$

L'excentricité est donnée par $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\,.$

Le demi-paramètre vaut $p=\frac{b^2}{a}=\frac{2^2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, si bien que le paramètre est $2\,p=\frac{8\sqrt{5}}{5}\,.$

Les sommets sont $\mathrm{A}^\star(a\,;0)=\mathrm{A}^\star(\sqrt{5}\,;0)$ et $\mathrm{A}'^\star(-a\,;0)=\mathrm{A}'^\star(-\sqrt{5}\,;0)\,.$

Les foyers sont $\mathrm{F}^\star(c\,;0)=\mathrm{F}^\star(3\,;0)$ et $\mathrm{F}'^\star(-c\,;0)=\mathrm{F}'^\star(-3\,;0)\,.$

Les asymptotes sont $y^\star=\pm\frac{b}{a}\,x^\star=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\,x^\star=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\,x^\star\,.$

Il s'agit maintenant de donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des asymptotes dans le repère $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}=y^\star_{\mathrm{A}}+2=0+2=2\\ y_{\mathrm{A}}=x^\star_{\mathrm{A}}-3=\sqrt{5}-3=-3+\sqrt{5}\end{cases}\quad\text{donc } \mathrm{A}(2\,;-3+\sqrt{5})$$

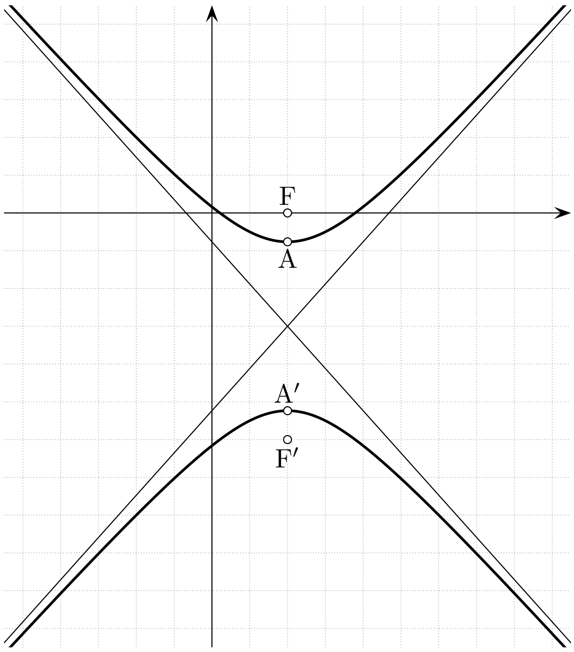
$$\begin{cases} x_{A'} = y^\star_{A'} + 2 = \quad 0+2 = 2 \\ y_{A'} = x^\star_{A'} - 3 = -\sqrt{5} - 3 = -3-\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{d'où } A'(2\,;-3-\sqrt{5})$$

$$\begin{cases} x_F = y^\star_F + 2 = 0+2 = 2 \\ y_F = x^\star_F - 3 = 3-3 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } F(2\,;0)$$

$$\begin{cases} x_{F'} = y^\star_{F'} + 2 = \quad 0+2 = 2 \\ y_{F'} = x^\star_{F'} - 3 = -3-3 = -6 \end{cases} \quad \text{d'où } F'(2\,;-6)$$

$$y^\star = \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\,x^\star \iff x-2 = \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\,(y+3) = \tfrac{2}{\sqrt{5}}\,(y+3)$$
$$\iff y+3 = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\,(x-2) \iff y = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\,x - 3 - \sqrt{5}$$

$$y^\star = -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\,x^\star \iff x-2 = -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\,(y+3) = -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\,(y+3)$$
$$\iff y+3 = -\tfrac{\sqrt{5}}{2}\,(x-2) \iff y = -\tfrac{\sqrt{5}}{2}\,x - 3 + \sqrt{5}$$



4) $4\,y^2 = x^2 + 2\,x + 8\,y$

$0 = x^2+2\,x-4\,y^2+8\,y = x^2+2\,x-4\,(y^2-2\,y) = (x+1)^2-1-4\,\big((y-1)^2-1\big)$

$(x+1)^2 - 4\,(y-1)^2 = -3$

$$\frac{4\,(y-1)^2}{3} - \frac{(x+1)^2}{3} = \frac{(y-1)^2}{\frac{3}{4}} - \frac{(x+1)^2}{3} = \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{(x+1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y-1 \\ y^\star = x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^\star - 1 \\ y = x^\star + 1 \end{cases}$$

l'équation de l'hyperbole s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \dfrac{y^{\star 2}}{(\sqrt{3})^2} = 1\,.$

Le demi axe focal est $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \sqrt{3}\,.$

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + 3} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

L'excentricité est donnée par $e = \frac{c}{a} = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}$.

Le demi-paramètre vaut $p = \frac{b^2}{a} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, si bien que le paramètre est $2\,p = 4\sqrt{3}$.

Les sommets sont $\mathrm{A}^\star(a\,;0) = \mathrm{A}^\star(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;0)$ et $\mathrm{A}'^\star(-a\,;0) = \mathrm{A}'^\star(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;0)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}^\star(c\,;0) = \mathrm{F}^\star(\frac{\sqrt{15}}{2}\,;0)$ et $\mathrm{F}'^\star(-c\,;0) = \mathrm{F}'^\star(-\frac{\sqrt{15}}{2}\,;0)$.

Les asymptotes sont $y^\star = \pm\frac{b}{a}\,x^\star = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,x^\star = \pm 2\,x^\star$.

Il s'agit maintenant de donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des asymptotes dans le repère $\mathcal{R}$.

$\begin{cases} x_\mathrm{A} = y^\star_\mathrm{A} - 1 = 0 + 2 = -1 \\ y_\mathrm{A} = x^\star_\mathrm{A} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\mathrm{A}\big(-1\,;1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{A}'} = y^\star_{\mathrm{A}'} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{A}'} = x^\star_{\mathrm{A}'} + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où $\mathrm{A}'\big(-1\,;1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$

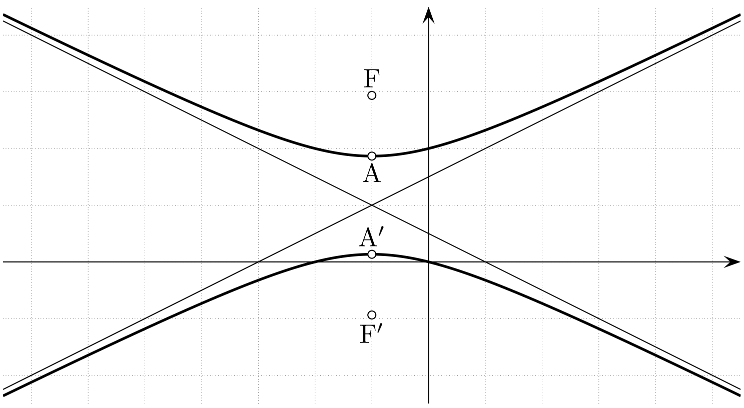
$\begin{cases} x_\mathrm{F} = y^\star_\mathrm{F} - 1 = 0 + 2 = -1 \\ y_\mathrm{F} = x^\star_\mathrm{F} + 1 = \frac{\sqrt{15}}{2} + 1 = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$ donc $\mathrm{F}\big(-1\,;1 + \frac{\sqrt{15}}{2}\big)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{F}'} = y^\star_{\mathrm{F}'} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{F}'} = x^\star_{\mathrm{F}'} + 1 = -\frac{\sqrt{15}}{2} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$ d'où $\mathrm{F}'\big(-1\,;1 - \frac{\sqrt{15}}{2}\big)$

$y^\star = 2\,x^\star \iff x+1 = 2\,(y-1) \iff y-1 = \frac{1}{2}\,(x+1) \iff y = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}$

$y^\star = -2\,x^\star \iff x+1 = -2\,(y-1) \iff y-1 = -\frac{1}{2}\,(x+1)$

$\iff y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$



5) $25\,x^2 - 9\,y^2 + 50\,x + 54\,y + 169 = 0$

$25\,(x^2 + 2\,x) - 9\,(y^2 - 6\,y) + 169 = 0$

$25\,\big((x+1)^2 - 1\big) - 9\,\big((y-3)^2 - 9\big) + 169$

$25\,(x+1)^2 - 9\,(y-3)^2 = -225$

$$\frac{9\,(y-3)^2}{225} - \frac{25\,(x+1)^2}{225} = \frac{(y-3)^2}{\frac{225}{9}} - \frac{(x+1)^2}{\frac{225}{25}} = \frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{9}$$
$$= \frac{(y-3)^2}{5^2} - \frac{(x+1)^2}{3^2} = 1$$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y - 3 \\ y^\star = x + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y^\star - 1 \\ y = x^\star + 3 \end{cases}$$

l'équation de l'hyperbole s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{5^2} - \dfrac{y^{\star 2}}{3^2} = 1$.

Le demi axe focal est $a = 5$ et $b = 3$.

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

L'excentricité est donnée par $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{5}$.

Le demi-paramètre vaut $p = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$, si bien que le paramètre est $2\,p = \frac{18}{5}$.

Les sommets sont $\mathrm{A}^\star(a\,;0) = \mathrm{A}^\star(5\,;0)$ et $\mathrm{A}'^\star(-a\,;0) = \mathrm{A}'^\star(-5\,;0)$.

Les foyers sont $\mathrm{F}^\star(c\,;0) = \mathrm{F}^\star(\sqrt{34}\,;0)$ et $\mathrm{F}'^\star(-c\,;0) = \mathrm{F}'^\star(-\sqrt{34}\,;0)$.

Les asymptotes sont $y^\star = \pm\frac{b}{a}\,x^\star = \pm\frac{3}{5}\,x^\star$.

Il s'agit maintenant de donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des asymptotes dans le repère $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = y^\star_{\mathrm{A}} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{A}} = x^\star_{\mathrm{A}} + 3 = 5 + 3 = 8 \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{A}(-1\,;8)$$

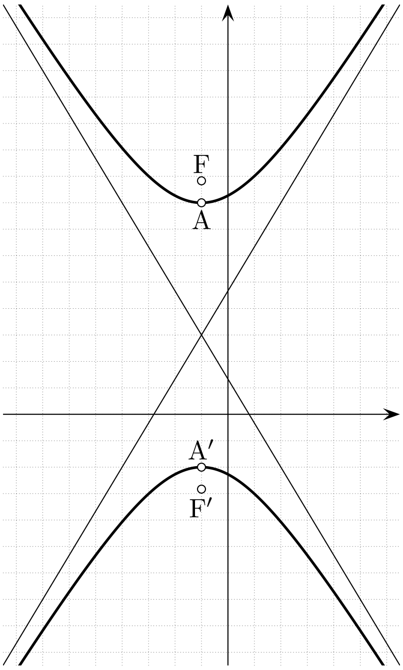
$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}'} = y^\star_{\mathrm{A}'} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{A}'} = x^\star_{\mathrm{A}'} + 3 = -5 + 3 = -2 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{A}'(-1\,;-2)$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F}} = y^\star_{\mathrm{F}} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{F}} = x^\star_{\mathrm{F}} + 3 = \sqrt{34} + 3 = 3 + \sqrt{34} \end{cases} \quad \text{donc } \mathrm{F}(-1\,;3 + \sqrt{34})$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{F}'} = y^\star_{\mathrm{F}'} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ y_{\mathrm{F}'} = x^\star_{\mathrm{F}'} + 3 = -\sqrt{34} + 3 = 3 - \sqrt{34} \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{F}'(-1\,;3 - \sqrt{34})$$

$y^\star = \frac{3}{5}\,x^\star \Longleftrightarrow x+1 = \frac{3}{5}\,(y-3) \Longleftrightarrow y-3 = \frac{5}{3}\,(x+1) \Longleftrightarrow y = \frac{5}{3}\,x + \frac{14}{3}$

$y^\star = -\frac{3}{5}\,x^\star \Longleftrightarrow x + 1 = -\frac{3}{5}\,(y-3) \Longleftrightarrow y - 3 = -\frac{5}{3}\,(x+1)$
$\Longleftrightarrow y = -\frac{5}{3}\,x + \frac{4}{3}$



6) $8\,x^2 - 6\,y^2 + 16\,x - 32 = 0$

$8\,(x^2 + 2\,x) - 6\,y^2 - 32 = 0$

$8\,\big((x+1)^2 - 1\big) - 6\,y^2 - 32 = 0$

$8\,(x+1)^2 - 6\,y^2 = 40$

$$\frac{8\,(x+1)^2}{40} - \frac{6\,y^2}{40} = \frac{(x+1)^2}{\frac{40}{8}} - \frac{y^2}{\frac{40}{6}} = \frac{(x+1)^2}{5} - \frac{y^2}{\frac{20}{3}} = 1$$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = x + 1 \\ y^\star = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x^\star - 1 \\ y = y^\star \end{cases}$$

l'équation de l'hyperbole s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{5} - \dfrac{y^{\star 2}}{\frac{20}{3}} = 1\,.$

Le demi axe focal est $a = \sqrt{5}$ et $b = \sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}\,.$

La demi-distance focale vaut $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + \frac{20}{3}} = \sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}\,.$

L'excentricité est donnée par $e = \frac{c}{a} = \dfrac{\frac{\sqrt{105}}{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{3}\,.$

Le demi-paramètre vaut $p = \frac{b^2}{a} = \dfrac{\frac{20}{3}}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{3\cdot 5} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$, si bien que le paramètre est $2\,p = \frac{8\sqrt{5}}{3}\,.$

Les sommets sont $A^\star(a\,;0) = A^\star(\sqrt{5}\,;0)$ et $A'^\star(-a\,;0) = A'^\star(-\sqrt{5}\,;0)\,.$

Les foyers sont $F^\star(c\,;0) = F^\star\big(\frac{\sqrt{105}}{3}\,;0\big)$ et $F'^\star(-c\,;0) = F'^\star\big(-\frac{\sqrt{105}}{3}\,;0\big)\,.$

Les asymptotes sont $y^\star = \pm\frac{b}{a}\,x^\star = \pm\dfrac{\frac{2\sqrt{15}}{3}}{\sqrt{5}}\,x^\star = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\,x^\star$.

Il s'agit maintenant de donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des asymptotes dans le repère $\mathcal{R}$.

$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = x^\star_{\mathrm{A}} - 1 = \sqrt{5} - 1 = -1 + \sqrt{5} \\ y_{\mathrm{A}} = \quad y^\star_{\mathrm{A}} = 0 \end{cases}$ donc $\mathrm{A}(-1+\sqrt{5}\,;0)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{A}'} = x^\star_{\mathrm{A}'} - 1 = -\sqrt{5} - 1 = -1 - \sqrt{5} \\ y_{\mathrm{A}'} = \quad y^\star_{\mathrm{A}'} = 0 \end{cases}$ d'où $\mathrm{A}'(-1-\sqrt{5}\,;0)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{F}} = x^\star_{\mathrm{F}} - 1 = \frac{\sqrt{105}}{3} - 1 = -1 + \frac{\sqrt{105}}{3} \\ y_{\mathrm{F}} = \quad y^\star_{\mathrm{F}} = 0 \end{cases}$ donc $\mathrm{F}(-1+\frac{\sqrt{105}}{3}\,;0)$

$\begin{cases} x_{\mathrm{F}'} = x^\star_{\mathrm{F}'} - 1 = -\frac{\sqrt{105}}{3} - 1 = -1 - \frac{\sqrt{105}}{3} \\ y_{\mathrm{F}'} = \quad y^\star_{\mathrm{F}'} = 0 \end{cases}$ d'où $\mathrm{F}'(-1-\frac{\sqrt{105}}{3}\,;0)$

$y^\star = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,x^\star \iff y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,(x+1) \iff y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$y^\star = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,x^\star \iff y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,(x+1) \iff y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$