5.28 Le centre de l'hyperbole est le milieu des foyers F et F′ :
$O\big(\frac{3+(-3)}{2}\,;\frac{0+0}{2}\big) = O(0\,;0)$; l'hyperbole est ainsi centrée à l'origine et $c = 3$.

On constate également que l'axe focal coïncide avec l'axe des abscisses.

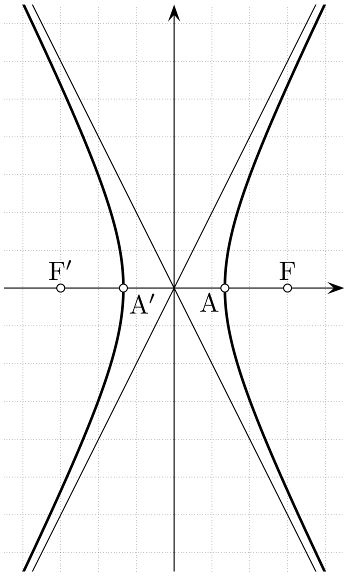
C'est pourquoi l'équation de l'hyperbole est de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Vu que les asymptotes ont pour équations $y = \pm 2\,x$, on en déduit que $\frac{b}{a} = 2$ ou encore $b = 2\,a$.

   En outre, $9 = c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (2\,a)^2 = 5\,a^2$, si bien que $a^2 = \frac{9}{5}$.

   Dès lors, $b^2 = (2\,a)^2 = 4\,a^2 = 4 \cdot \frac{9}{5} = \frac{36}{5}$.

   L'hyperbole admet donc pour équation $\dfrac{x^2}{\frac{9}{5}} - \dfrac{y^2}{\frac{36}{5}} = 1$.



2) Vu que l'hyperbole passe par le point $(4\,;1)$, les coefficients a et b doivent satisfaire le système $\begin{cases} \frac{4^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = \frac{16}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ 9 = c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$.

   La seconde équation fournit $b^2 = 9 - a^2$, que l'on substitue dans la première équation :

   $$1 = \frac{16}{a^2} - \frac{1}{9 - a^2} = \frac{16\,(9 - a^2) - a^2}{a^2\,(9 - a^2)}$$

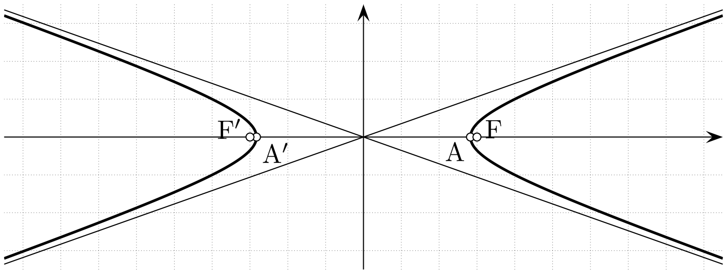
   $$a^2\,(9 - a^2) = 16\,(9 - a^2) - a^2$$

   $$0 = a^4 - 26\,a^2 + 144 = (a^2 - 18)\,(a^2 - 8)$$

   (a) Si $a^2 = 18$, alors $b^2 = 9 - a^2 = 9 - 18 = -9$ ce qui est impossible.

   (b) Si $a^2 = 8$, alors $b^2 = 9 - a^2 = 9 - 8 = 1$.

   Dans ce cas, l'équation de l'hyperbole s'écrit $\dfrac{x^2}{8} - y^2 = 1$.


F′
A′
A
F