5.3 1) En remplaçant $e = 1$ dans l'équation $(1 - e^2)\,x^2 + y^2 - 2\,e^2\,r\,x - e^2\,r^2 = 0$, on obtient :

$(1 - 1^2)\,x^2 + y^2 - 2 \cdot 1^2 \cdot r\,x - 1^2 \cdot r^2 = 0$

$y^2 - 2\,r\,x - r^2 = 0$

La formule définissant le demi-paramètre $p = e\,r$ devient $p = r$, lorsque $e = 1$. L'équation précédente s'écrit ainsi :

$y^2 - 2\,p\,x - p^2 = 0$ ou encore $y^2 = 2\,p\,x + p^2$

2) Les relations $\begin{cases} x^\star = x + \frac{p}{2} \\ y^\star = y \end{cases}$ donnent $\begin{cases} x = x^\star - \frac{p}{2} \\ y = y^\star \end{cases}$.

L'équation $y^2 = 2\,p\,x + p^2$ s'écrit donc dans le repère $\mathcal{R}^\star$:

$y^{\star 2} = 2\,p\,(x^\star - \frac{p}{2}) + p^2 = 2\,p\,x^\star - p^2 + p^2 = 2\,p\,x^\star$

3) (a) $\begin{cases} x^\star_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}} + \frac{p}{2} = -\frac{r}{2} + \frac{p}{2} = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = 0 \\ y^\star_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{A}} \qquad = 0 \end{cases}$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les coordonnées du point A sont donc $\mathrm{A}(0\,;0)$.

(b) $\begin{cases} x^\star_{\mathrm{F}} = x_{\mathrm{F}} + \frac{p}{2} = 0 + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \\ y^\star_{\mathrm{F}} = y_{\mathrm{F}} \qquad = 0 \end{cases}$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les coordonnées du point F sont donc $\mathrm{F}(\frac{p}{2}\,;0)$.

(c) L'équation de la directrice $d : x = -r$ devient dans le repère $\mathcal{R}^\star$:

$d : x^\star - \frac{p}{2} = -r = -p$, c'est-à-dire $d : x^\star = -\frac{p}{2}$

(d) Les points P et P′ sont les points de la parabole de même abscisse que F. Ils s'obtiennent par conséquent en résolvant le système :

$\begin{cases} y^{\star 2} = 2\,p\,x^\star \\ x^\star = \frac{p}{2} \end{cases}$

En remplaçant $x^\star = \frac{p}{2}$ dans la première équation, on trouve :

$y^{\star 2} = 2\,p \cdot \frac{p}{2} = p^2 \iff 0 = y^{\star 2} - p^2 = (y^\star - p)\,(y^\star + p)$

On a donc trouvé $\mathrm{P}(\frac{p}{2}\,;p)$ et $\mathrm{P}'(\frac{p}{2}\,;-p)$.