5.31 On considère y comme une fonction implicite de x, c'est-à-dire $y = f(x)$.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

   $\frac{1}{a^2}\,x^2 + \frac{1}{b^2}\,f^2(x) = 1$

   $\big(\frac{1}{a^2}\,x^2 + \frac{1}{b^2}\,f^2(x)\big)' = \big(1\big)'$

   $\frac{1}{a^2} \cdot 2\,x + \frac{1}{b^2} \cdot 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

   $\frac{x}{a^2} + \frac{f(x)}{b^2}\,f'(x) = 0$

   $\frac{f(x)}{b^2}\,f'(x) = -\frac{x}{a^2}$

   $f'(x) = -\frac{b^2\,x}{a^2\,f(x)}$

   $y' = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y}$

2) L'équation de la tangente au graphe de f au point $\mathrm{P}\big(x_1\,;f(x_1)\big)$ est donnée par la formule :

   $y = f'(x_1)\,(x - x_1) + f(x_1)$

   $y = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,f(x_1)}\,(x - x_1) + f(x_1)$

   $y = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1) + y_1$

   $y_1\,y = -\frac{b^2\,x_1}{a^2}\,(x - x_1) + y_1^2$

   $\frac{y_1\,y}{b^2} = -\frac{x_1}{a^2}\,(x - x_1) + \frac{y_1^2}{b^2}$

   $\frac{y_1\,y}{b^2} = -\frac{x_1\,x}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

   Étant donné que le point $\mathrm{P}(x_1\,;y_1)$ fait partie de l'ellipse Γ, ses coordonnées vérifient son équation : $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$.

   Par suite, l'équation de la tangente devient :

   $\frac{y_1\,y}{b^2} = -\frac{x_1\,x}{a^2} + 1$

   $\frac{x_1\,x}{a^2} + \frac{y_1\,y}{b^2} = 1$