5.32 On considère y comme une fonction implicite de x, c'est-à-dire $y = f(x)$.

1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{1}{a^2}\,x^2 - \frac{1}{b^2}\,f^2(x) = 1$

$\big(\frac{1}{a^2}\,x^2 - \frac{1}{b^2}\,f^2(x)\big)' = \big(1\big)'$

$\frac{1}{a^2} \cdot 2\,x - \frac{1}{b^2} \cdot 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

$\frac{x}{a^2} - \frac{f(x)}{b^2}\,f'(x) = 0$

$\frac{f(x)}{b^2}\,f'(x) = \frac{x}{a^2}$

$f'(x) = \frac{b^2\,x}{a^2\,f(x)}$

$y' = \frac{b^2\,x}{a^2\,y}$

2) L'équation de la tangente au graphe de f au point $\mathrm{P}\big(x_1\,;f(x_1)\big)$ est donnée par la formule :

$y = f'(x_1)\,(x - x_1) + f(x_1)$

$y = \frac{b^2\,x_1}{a^2\,f(x_1)}\,(x - x_1) + f(x_1)$

$y = \frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1) + y_1$

$y_1\,y = \frac{b^2\,x_1}{a^2}\,(x - x_1) + y_1^2$

$\frac{y_1\,y}{b^2} = \frac{x_1}{a^2}\,(x - x_1) + \frac{y_1^2}{b^2}$

$\frac{y_1\,y}{b^2} = \frac{x_1\,x}{a^2} - \big(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\big)$

Étant donné que le point $\mathrm{P}(x_1\,;y_1)$ fait partie de l'hyperbole Γ, ses coordonnées vérifient son équation : $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$.

Par suite, l'équation de la tangente devient :

$\frac{y_1\,y}{b^2} = \frac{x_1\,x}{a^2} - 1$

$\frac{x_1\,x}{a^2} - \frac{y_1\,y}{b^2} = 1$