5.33 1) $3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 1^2 = 27 - 10 = 17$ montre que $\mathrm{P}(3\,;1) \in \Gamma$.

$3\,x^2 - 10\,y^2 = 17$

$$\frac{3\,x^2}{17} - \frac{10\,y^2}{17} = \frac{x^2}{\frac{17}{3}} - \frac{y^2}{\frac{17}{10}} = 1$$

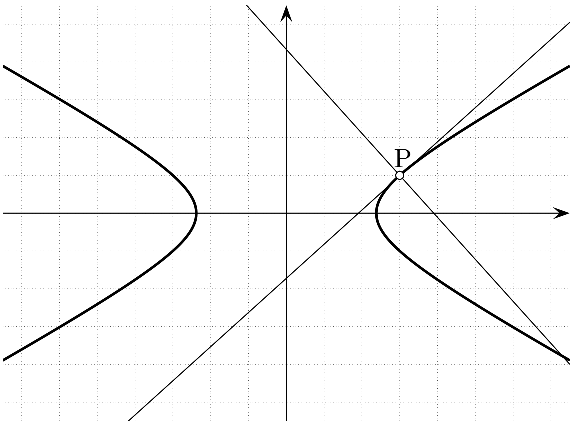
La conique Γ est une hyperbole, centrée à l'origine et d'axe focal Ox, dont la tangente au point $\mathrm{P}(3\,;1)$ admet pour équation :

$$\frac{3\,x}{\frac{17}{3}} - \frac{1\,y}{\frac{17}{10}} = 1 \iff \frac{9\,x}{17} - \frac{10\,y}{17} = 1 \iff 9\,x - 10\,y - 17 = 0$$

Toute perpendiculaire à la tangente $9\,x - 10\,y - 17 = 0$ possède une équation de la forme $10\,x + 9\,y + c = 0$.

Vu que la normal doit passer par le point $\mathrm{P}(3\,;1)$, on doit avoir :
$10 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + c = 0$, d'où suit $c = -39$.

On conclut que la normale à Γ en P s'écrit $10\,x + 9\,y - 39 = 0$.



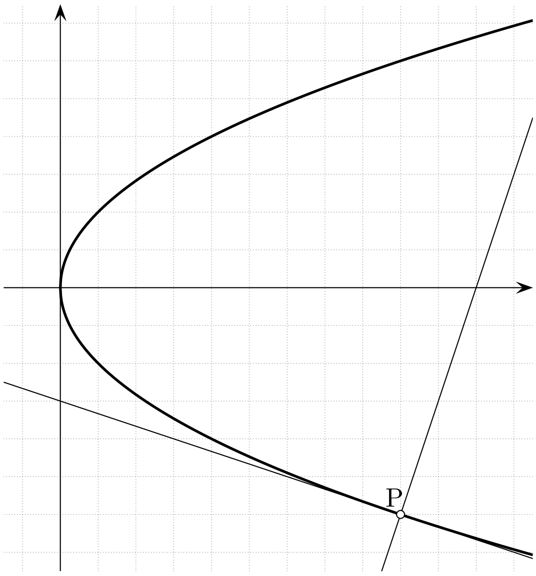
2) $(-6)^2 = 36 = 4 \cdot 9$ prouve que $\mathrm{P}(9\,;-6) \in \Gamma$.

L'équation de la tangente à la parabole $y^2 = 4\,x = 2{\cdot}2\,x$ au point $\mathrm{P}(9\,;-6)$ est donnée par la formule :
$-6\,y = 2\,x + 2 \cdot 9 \iff 2\,x + 6\,y + 18 = 0 \iff x + 3\,y + 9 = 0$

Toute perpendiculaire à la tangente $x + 3\,y + 9 = 0$ est de la forme $3\,x - y + c = 0$.

Vu que la normale passe par $\mathrm{P}(9\,;-6)$, on obtient $3 \cdot 9 - (-6) + c = 0$, c'est-à-dire $c = -33$.

Par conséquent, la normale à Γ en P admet pour équation $3\,x - y - 33 = 0$.



3) Comme $(-3)^2 + 5 \cdot 1^2 - 14 = 0$, on a bien $\mathrm{P}(-3\,;1) \in \Gamma$.

$x^2 + 5\,y^2 - 14 = 0$

$x^2 + 5\,y^2 = 14$

$\dfrac{x^2}{14} + \dfrac{5\,y^2}{14} = \dfrac{x^2}{14} + \dfrac{y^2}{\frac{14}{5}} = 1$

La conique Γ est ainsi une ellipse centrée à l'origine, de demi-grand axe $a = \sqrt{14}$ et de demi-petit axe $b = \sqrt{\frac{14}{5}} = \frac{\sqrt{70}}{5}$.

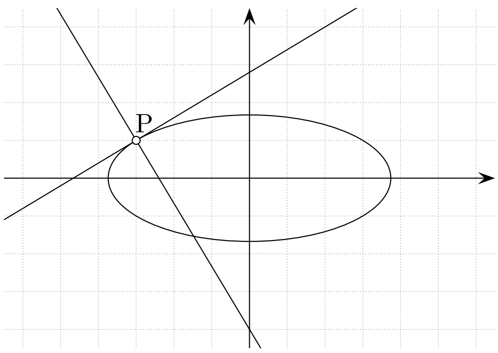
L'équation de la tangente à l'ellipse Γ au point $\mathrm{P}(-3\,;1)$ est donnée par la formule :

$\dfrac{-3\,x}{14} + \dfrac{1\,y}{\frac{14}{5}} = 1 \iff \dfrac{-3\,x}{14} + \dfrac{5\,y}{14} - 1 = 0 \iff -3\,x + 5\,y - 14 = 0$

Toute perpendiculaire à la tangente $-3\,x + 5\,y - 14$ peut s'écrire sous la forme $5\,x + 3\,y + c = 0$.

La normale passant par $\mathrm{P}(-3\,;1)$ doit vérifier $5 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + c = 0$, si bien que $c = 12$.

Il en résulte que la normale à Γ en P a pour équation $5\,x + 3\,y + 12 = 0$.



4) $25 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 + 4 \cdot (-4)^2 - 100 = 25 \cdot \frac{36}{25} + 4 \cdot 16 - 100 = 36 + 64 - 100 = 0$ confirme que $\mathrm{P}\left(\frac{6}{5}\,; -4\right) \in \Gamma$.

$25\,x^2 + 4\,y^2 - 100 = 0$

$25\,x^2 + 4\,y^2 = 100$

$\dfrac{25\,x^2}{100} + \dfrac{4\,y^2}{100} = \dfrac{x^2}{\frac{100}{25}} + \dfrac{y^2}{\frac{100}{4}} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

On constate que le grand axe est l'axe des ordonnées. C'est pourquoi, on recourt au repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y \\ y^\star = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^\star \\ y = x^\star \end{cases}$$

dans lequel l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{25} + \dfrac{y^{\star 2}}{4} = 1\,.$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les coordonnées du point P sont $\mathrm{P}^\star(-4\,; \frac{6}{5})$ et l'équation de la tangente à Γ en P est donnée par :

$\dfrac{-4\,x^\star}{25} + \dfrac{\frac{6}{5}\,y^\star}{4} = 1 \iff -16\,x^\star + 30\,y^\star = 100 \iff -8\,x^\star + 15\,y^\star - 50 = 0$

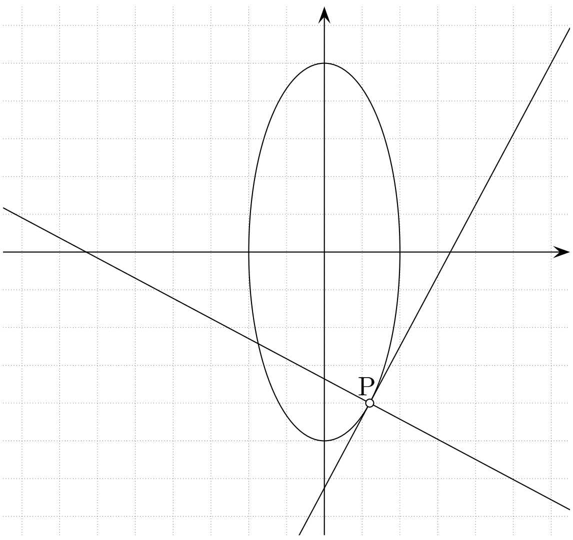
Dans le repère initial $\mathcal{R}$, l'équation de cette tangente devient :

$-8\,x^\star + 15\,y^\star - 50 = 0 \iff 15\,x - 8\,y - 50 = 0$

Toute perpendiculaire à la tangente $15\,x - 8\,y - 50 = 0$ a une équation de la forme $8\,x + 15\,y + c = 0\,.$

En particulier, la normale passant par $\mathrm{P}\left(\frac{6}{5}\,; -4\right)$ doit vérifier :
$8 \cdot \frac{6}{5} + 15 \cdot (-4) + c = 0$, d'où suit $c = \frac{252}{5}$.

L'équation de la normale à Γ au point P est donc $8\,x + 15\,y + \frac{252}{5} = 0 \iff 40\,x + 75\,y + 252 = 0\,.$



5) $6^2 - 8 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 2 = 36 - 48 + 10 + 2 = 0$ montre que $\mathrm{P}(6\,;2) \in \Gamma$.

$x^2 - 8\,x + 5\,y + 2 = 0$

$(x-4)^2 - 16 + 5\,y + 2 = 0$

$(x-4)^2 = -5\,y + 14 = -5\left(y - \frac{14}{5}\right)$

La conique Γ est donc une parabole de sommet $\left(4\,;\frac{14}{5}\right)$, dont l'axe focal est vertical et en-dessous de laquelle se situe son foyer.

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = -\left(y - \frac{14}{5}\right) \\ y^\star = x - 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y^\star + 4 \\ y = -x^\star + \frac{14}{5} \end{cases}$$

l'équation de la parabole s'écrit $y^2 = 5\,x^\star$.

Les coordonnées du point $\mathrm{P}(6\,;2)$ deviennent $\begin{cases} x^\star_{\mathrm{P}} = -\left(2 - \frac{14}{5}\right) = \frac{4}{5} \\ y^\star_{\mathrm{P}} = 6 - 4 \qquad = 2 \end{cases}$

L'équation de la tangente à la parabole $y^2 = 5\,x^\star = 2 \cdot \frac{5}{2}\,x^\star$ au point $\mathrm{P}^\star\left(\frac{4}{5}\,;2\right)$ est donnée par la formule :

$2\,y^\star = \frac{5}{2}\,x^\star + \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{2}\,x^\star + 2 \iff 5\,x^\star - 4\,y^\star + 4 = 0$

Dans le repère $\mathcal{R}$, l'équation de cette tangente devient :

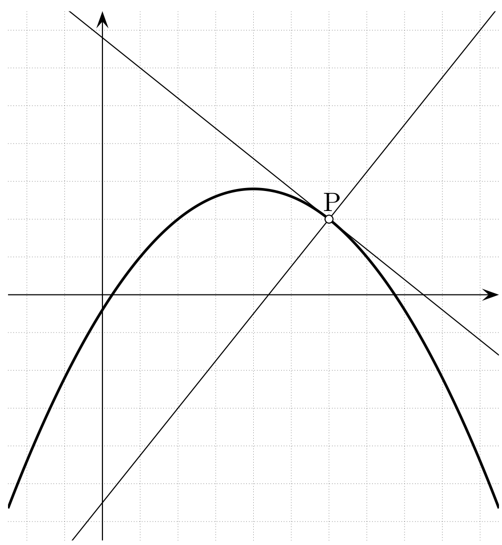
$-5\left(y - \frac{14}{5}\right) - 4\,(x-4) + 4 = 0 \iff 4\,x + 5\,y - 34 = 0$

Toute perpendiculaire à la tangente $4\,x + 5\,y - 34 = 0$ est de la forme $5\,x - 4\,y + c = 0$.

Comme la normale doit passer par le point $\mathrm{P}(6\,;2)$, on obtient :

$5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 + c = 0$, d'où $c = -22$.

Dès lors, l'équation de la normale à Γ au point P est $5\,x - 4\,y - 22 = 0$.



6) $2^2+4\cdot 1^2-6\cdot 2-16\cdot 1+20=4+4-12-16+20=0$ atteste que $\mathrm{P}(2\,;1)\in\Gamma$.

$x^2-6\,x+4\,y^2-16\,y+20=0$

$x^2-6\,x+4\,(y^2-4\,y)+20=0$

$(x-3)^2-9+4\,\big((y-2)^2-4\big)+20=0$

$(x-3)^2+4\,(y-2)^2=5$

$$\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{4\,(y-2)^2}{5}=\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{\frac{5}{4}}=1$$

On constate que Γ est une ellipse de centre $(3\,;2)$, dont le grand axe est parallèle à l'axe des abscisses, de demi-grand axe $a=\sqrt{5}$ et de demi-petit axe $b=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star=x-3\\ y^\star=y-2\end{cases}\iff\begin{cases} x=x^\star+3\\ y=y^\star+2\end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{5}+\dfrac{y^{\star 2}}{\frac{5}{4}}=1$.

Les coordonnées du point $\mathrm{P}(2\,;1)$ deviennent $\begin{cases} x^\star_{\mathrm{P}}=2-3=-1\\ y^\star_{\mathrm{P}}=1-2=-1\end{cases}$.

L'équation de la tangente à l'ellipse $\dfrac{x^{\star 2}}{5}+\dfrac{y^{\star 2}}{\frac{5}{4}}=1$ au point $\mathrm{P}^\star(-1\,;-1)$ est donnée par la formule :

$$\frac{-1\,x^\star}{5}+\frac{-1\,y^\star}{\frac{5}{4}}=1\iff x^\star+4\,y^\star+5=0$$

Quand on écrit l'équation de cette tangente dans le repère $\mathcal{R}$, on trouve :

$x-3+4\,(y-2)+5=0\iff x+4\,y-6=0$

Toute perpendiculaire à la tangente $x+4\,y-6=0$ est de la forme $4\,x-y+c=0$.

Attendu que la normale doit passer par $\mathrm{P}(2\,;1)$, son équation vérifie :

$4\cdot 2-1+c=0$, de sorte que $c=-7$.

En définitive, l'équation de la normale à Γ au point P est $4\,x-y-7=0$.