5.34 1) Pour déterminer l'intersection de la droite $y = m\,x + h$ avec la parabole $y^2 = 2\,p\,x$, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} y = m\,x + h \\ y^2 = 2\,p\,x \end{cases}$$

En substituant $y = m\,x + h$ dans l'équation de la parabole, on obtient :

$(m\,x + h)^2 = 2\,p\,x$

$m^2\,x^2 + 2\,h\,m\,x + h^2 = 2\,p\,x$

$m^2\,x^2 + 2\,h\,m\,x - 2\,p\,x + h^2 = m^2\,x^2 + 2\,(h\,m - p)\,x + h^2 = 0$

2) Cette équation admet une solution unique si :

$$\begin{aligned} 0 = \Delta &= \big(2\,(h\,m - p)\big)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot h^2 \\ &= 4\,h^2\,m^2 - 8\,h\,m\,p + 4\,p^2 - 4\,h^2\,m^2 \\ &= -8\,h\,m\,p + 4\,p^2 \\ &= -4\,p\,(2\,h\,m - p) \end{aligned}$$

Puisque $p > 0$, $\Delta = 0$ si $2\,h\,m - p = 0 \iff h = \frac{p}{2\,m}$.

3) Une droite $y = m\,x + h$ de pente m est tangente à la parabole $y^2 = 2\,p\,x$ seulement si elle possède un unique point d'intersection avec celle-ci.

Cette condition étant satisfaite lorsque $h = \frac{p}{2\,m}$, on conclut que l'équation de la tangente doit être $y = m\,x + \frac{p}{2\,m}$.